



La valutazione dei credit derivatives ed una sua applicazione a dati di mercato.

a cura di Alessandro Matta

1. La valutazione di credit derivatives.	1
1.1 Ipotesi di base.	1
1.2 Strumenti single-name.	2
1.3 Strumenti multi-name.	4
1.4 Indici di credit default swap.....	7
2. Applicazione ai dati di mercato.	9
2.1. Stima delle intensità di default.....	12
2.2. Valutazione di credit default swap.....	14
2.3. Valutazione di first to default swap.	18
2.4 Valutazione di indici di credit default swap.	21
Conclusioni.	23
Riferimenti bibliografici.	24

Si ringrazia la Prof.ssa Elisa Luciano
per l'assistenza e la supervisione fornita nel corso del lavoro.

In collaborazione con



1. LA VALUTAZIONE DI CREDIT DERIVATIVES.

Lo scopo di questa trattazione è di implementare un modello in forma ridotta¹ che permetta la valutazione di contratti derivati di credito, a prescindere dalla forma tecnica in cui si presentino.

Al fine di giungere la determinazione di un prezzo di equilibrio dei singoli *credit derivatives* è necessario procedere a definire alcuni passaggi²:

- formulare una serie di ipotesi di base necessarie alla valutazione;
- descrivere in termini matematici la struttura del contratto oggetto di studio;
- stimare le distribuzioni di probabilità desumibili dai dati di mercato;
- calcolare il prezzo del derivato di credito.

Si mantiene una distinzione tra contratti di tipo *single-name* e di tipo *multi-name*. Tale suddivisione si rende necessaria per le intrinseche differenze delle due categorie di strumenti³.

1.1 Ipotesi di base.

È necessario innanzitutto inserire alcune ipotesi riguardanti i fattori critici per il *pricing* dei *credit derivatives*, quali:

1. si ipotizza un *recovery rate* costante nel tempo;
2. la struttura dei tassi di interesse è di tipo deterministico;
3. si suppone l'indipendenza dei tassi di interesse dal *time to default* e dal *recovery rate*.

Tali ipotesi permettono di concentrare l'attenzione sulla variabile oggetto di questo studio, il cosiddetto *time to default*, indicato con τ .

Nella descrizione dei vari strumenti si utilizzano, per convenzione, alcune notazioni:

- $B(0, T)$ indica il valore in zero di un titolo senza cedola e privo di rischio con scadenza in T e viene quindi anche interpretato come fattore di sconto;
- $D(0, T)$ è il prezzo in zero di un titolo con rischio di credito e scadenza in T ;
- R è il *recovery rate*, ipotizzato costante;
- il parametro L esprime il valore nozionale del contratto.

¹ Sulla base del modello in forma ridotta, come descritto da Giesecke (2002).

² Per una descrizione dettagliata del processo di valutazione si veda Bielecki e Rutowski (2002).

³ Per la definizione del modello si veda il primo *working paper* di questa serie, *Approcci matematico-statistici alla valutazione del rischio di credito*.

1.2 Strumenti single-name.

Nello studio dei contratti che presentano una unica attività sottostante le funzioni di probabilità vengono direttamente ricavate dal primo salto che avvenga su un processo di Poisson con intensità λ , propria del soggetto che ha emesso la *reference obligation*.

Nella trattazione che segue il punto di vista adottato per la descrizione in termini matematici e statistici dei contratti è quello dell'acquirente della protezione. Tale scelta non è comunque vincolante, in quanto i flussi osservati dalla controparte, il venditore della protezione, sono i medesimi cambiati di segno.

Si desidera definire i diversi flussi ed il *payoff*, in funzione del verificarsi o meno del *credit event*. A questo proposito si introduce una funzione indicatrice⁴:

$$\mathbf{1}_{(a \leq b)} \begin{cases} \text{vale 1 se è vera la proposizione } (a \leq b) \\ \text{vale 0 se è falso l'argomento } (a > b) \end{cases}$$

Per chiarire al meglio il procedimento impiegato, nelle pagine successive si proporrà una applicazione su uno dei contratti derivati di credito più diffusi, il *credit default swap*.

Si seguirà pertanto un procedimento articolato in cinque punti cruciali:

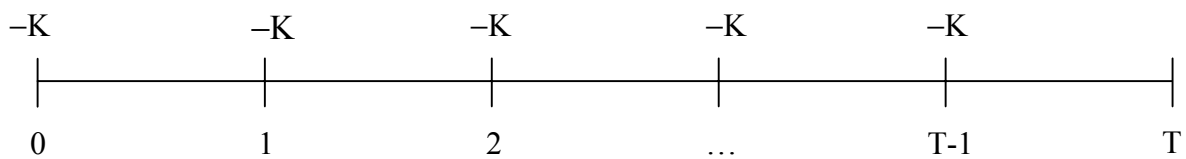
- descrizione delle tempistiche e delle entità dei flussi di cassa e del *payoff* sull'asse dei tempi;
- descrizione in termini matematici del contratto;
- impostazione dell'equazione di equilibrio per valutare il contratto, ovvero calcolare il prezzo oppure lo *spread* di equilibrio;
- inserimento delle funzioni di probabilità per la valutazione;
- calcolo del prezzo di equilibrio del contratto.

⁴ Secondo questo schema logico, un indicatore quale $\mathbf{1}_{(\tau \leq T)}$ annulla il flusso di cassa se non si verifica il *default* entro T , mentre lo attiva qualora venisse osservato entro tale scadenza.

Valutazione di un credit default swap.

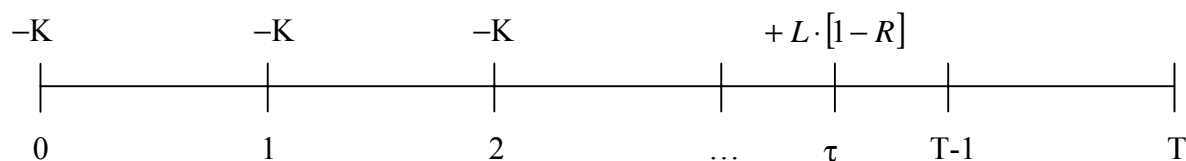
Un contratto di *credit default swap* presuppone la presenza di una serie di pagamenti corrisposti al venditore della protezione, condizionatamente alla sopravvivenza dell'attività di riferimento. La perdita in caso di *default* viene disciplinata come nei contratti di *credit default put* con regolamento di tipo americano.

Una volta attivato il contratto l'acquirente ha l'obbligo di pagare periodicamente alla controparte un premio K . Se non si assiste al *default* del titolo sottostante i pagamenti, di ammontare stabilito in sede contrattuale ed in maniera di solito anticipata, procedono fino alla scadenza naturale T .



Qualora si verifichi il *default* della *reference entity* in un qualsiasi momento all'interno dell'intervallo $[0, T]$ si procede alla regolazione delle posizioni: il venditore della protezione è tenuto a risarcire l'acquirente della perdita subita secondo le modalità stabilite in sede contrattuale, ed il compratore cessa di pagare i premi periodici.

Qualora le parti decidano di disciplinare il regolamento secondo lo schema del *cash settlement*, l'acquirente della protezione riceve la differenza tra il valore nominale del titolo oggetto della protezione e il suo valore di recupero.



L'aspetto fondamentale negli strumenti *credit default swap* è la determinazione del premio K . In una condizione di equilibrio è necessario trovare quel valore di K che soddisfi la condizione per cui la somma dei flussi e del *payoff* attesi all'inizio del contratto sia nulla. Ciò avviene al verificarsi della seguente espressione:

$$E_0 \left[- \sum_{i=0}^{T-1} K \cdot 1_{(\tau > t_i)} \cdot B(0, t_i) + L \cdot [1 - R] \cdot 1_{(\tau \leq T)} \cdot B(0, \tau) \right] = 0$$

dove $E_0[\cdot]$ è l'operatore di valore atteso (*risk-neutral*) in $t = 0$.

È possibile operare una distinzione tra:

- la *premium leg*, che rappresenta quanto viene corrisposto dal *protection buyer* alla controparte come remunerazione per il rischio che si assume nel garantire la protezione, ovvero dalla somma dei premi K scontati, $\sum_{i=0}^{T-1} K \cdot 1_{(\tau > t_i)} \cdot B(0, t_i)$;
- la *default leg* $L \cdot [1 - R] \cdot 1_{(\tau \leq T)} \cdot B(0, \tau)$, che esprime il *payoff* dovuto dal venditore della protezione all'acquirente della protezione nel caso in cui si verifichi il *credit event*.

Quindi, in una situazione di equilibrio le due *leg* devono coincidere, in modo che una delle parti non abbia un potenziale vantaggio economico sull'altra.

Inserendo le probabilità relative al soggetto con rischio di credito, si ottiene il premio K definito dalla relazione⁵:

$$-K \cdot \sum_{i=0}^{T-1} P[\tau > t_i] \cdot B(0, t_i) + \sum_{i=1}^T P[\tau = t_i] \cdot L \cdot [1 - R] \cdot B(0, t_i) = 0$$

Quindi si ricava il valore del premio in $t = 0$, cioè:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^T P[\tau = t_i] \cdot L \cdot [1 - R] \cdot B(0, t_i)}{\sum_{i=0}^{T-1} P[\tau > t_i] \cdot B(0, t_i)}$$

1.3 Strumenti multi-name.

I derivati creditizi *multi-name* sono contratti finanziari il cui *payoff* dipende da eventi di credito che colpiscono un determinato insieme di titoli su un certo orizzonte temporale.

Questa è una famiglia di strumenti molto variegata, che per lo più si rifà alle strutture già esaminate per i contratti *single-name*, adattandole alle esigenze imposte dalla gestione di un insieme di attività.

Al suo interno si possono riconoscere due principali categorie di derivati di credito:

- la prima è caratterizzata dal regolamento delle posizioni a seguito del verificarsi di un determinato numero di insolvenze all'interno del paniere di titoli prescelto: sono i cosiddetti *basket default swap* o più in generale *rank credit derivatives*;

⁵ Si ipotizza, per semplificare l'impostazione del modello, che il *default* produca i suoi effetti esclusivamente in coincidenza con il pagamento dei premi.

- la seconda fa dipendere il risarcimento della perdita subita dall'acquirente della protezione dai percentili della distribuzione della perdita del portafoglio derivante dalle insolvenze: questi contratti sono conosciuti come *percentile credit derivatives*, esempi dei quali sono il *portfolio default swap* e il *collateralized debt obligation*.

Il capitale nozionale degli strumenti *multi-name* viene indicato con L , a cui corrisponde un valore L_i che rappresenta l'ammontare del capitale protetto relativo ad un singolo *reference asset*:

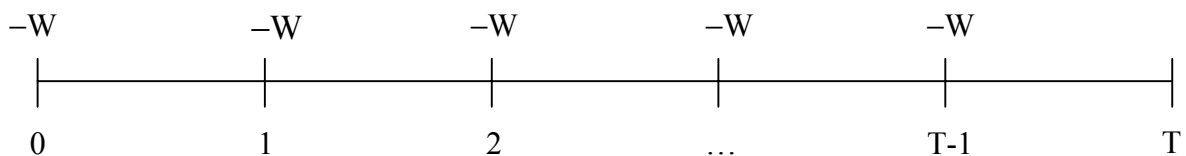
$$L = \sum_{i=1}^n L_i$$

In seguito si ricorrerà ad alcune semplificazioni rispetto alle ipotesi sinora adottate nella trattazione di strumenti *single-name* che permettano uno studio più agevole. In particolare si ipotizza un portafoglio di *reference assets* omogenei, la cui omogeneità viene definita nei confronti di due elementi:

- il valore protetto è uguale per ogni *reference obligation*, per cui $L = n \cdot L_i$;
- il *recovery rate* è il medesimo per tutte le attività sottostanti e pari a R .

Valutazione di un first to default swap.

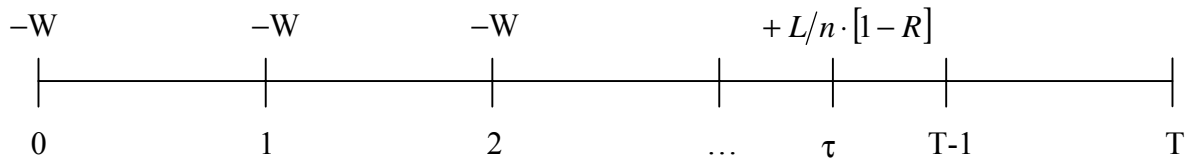
Il contratto di *first to default swap* rappresenta la base per potere successivamente estendere la metodologia impiegata anche agli altri strumenti *multi-name*⁶. Nella forma esaminata di *basket default swap*, esso consiste nella protezione dal rischio di credito offerta dal *protection seller* rispetto al verificarsi del primo *default* in un insieme di n titoli. La remunerazione del venditore della protezione per il rischio che si accolla è data, come nei contratti *single-name credit default swap*, dal pagamento di un premio periodico W ricevuto in forma anticipata dalla controparte.



Invece, qualora avvenga il *default*, il pagamento corrisponde alla differenza tra valore nominale ed il *recovery value* dell' i -esimo titolo del paniere di riferimento che si sia rivelato essere il primo

⁶ Per la descrizione di un approccio diverso si veda, ad esempio, Li (1999).

in insolvenza. Questo valore viene indicato con $L_i \cdot [1 - D_i(\tau, T)]$, ovvero $\frac{L}{n} \cdot [1 - R]$, per l'ipotesi di omogeneità formulata.



La definizione del *time to default* τ del paniere è relativa al verificarsi del primo *default* che avviene sulle n attività sottostanti. Pertanto nel caso di un *first to default swap* la variabile aleatoria τ risulta essere definita come: $\tau = \min(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$

Si vuole trovare il premio periodico W corrisposto dall'acquirente della protezione alla controparte. Il premio deve assumere un valore tale per cui sia verificata la condizione di equilibrio:

$$E_0 \left[- \sum_{i=0}^{T-1} W \cdot 1_{(\tau > t_i)} \cdot B(0, t_i) + \frac{L}{n} \cdot [1 - R] \cdot 1_{(\tau \leq T)} \cdot B(0, \tau) \right] = 0$$

Inserendo le funzioni di probabilità relative all'insieme delle n attività rischiose in esame, si ottiene

$$-W \cdot \sum_{i=0}^{T-1} P[\tau_1 > t_i, \dots, \tau_n > t_i] \cdot B(0, t_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^T P[\tau_j = t_i] \cdot \frac{L}{n} \cdot [1 - R] \cdot B(0, t_i) = 0$$

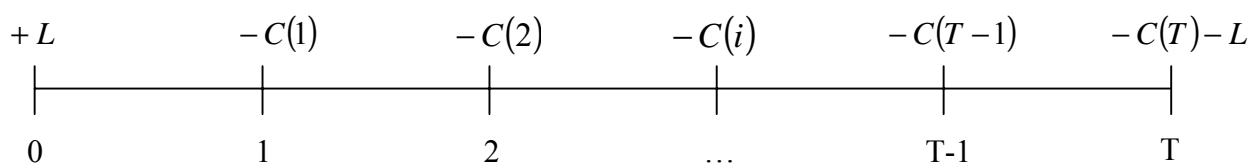
Si ricava il premio W di equilibrio come:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^T P[\tau_j = t_i] \cdot \frac{L}{n} \cdot [1 - R] \cdot B(0, t_i)}{\sum_{i=0}^{T-1} P[\tau_1 > t_i, \dots, \tau_n > t_i] \cdot B(0, t_i)}$$

1.4 Indici di credit default swap.

La valutazione di questi strumenti risulta molto articolata, anche per la presenza di numerose forme in cui essi possono essere implementati. Si sceglie pertanto di descrivere in particolare la struttura tipica dello strumento JECI di JP Morgan⁷.

Il contratto prevede l'emissione di un titolo per un ammontare nominale pari a L , da parte del soggetto che desidera acquisire la protezione su un insieme di n attività con rischio di credito, su cui periodicamente vengono pagate le cedole $C(t)$.



Qualora una o più attività inserite nel paniere di riferimento si rivelino insolventi, la parte che ha sottoscritto l'emissione, in veste di venditore della protezione, rifonde la controparte della perdita. Questo avviene, appunto, come se tra i due esistesse una serie di contratti di *credit default swap* che coprono dal rischio creditizio dell'insieme di riferimento.

In tale evenienza il titolo emesso continua a pagare interessi su un capitale nozionale ridotto del valore della posizione ormai chiusa.

Si introduce nuovamente la definizione di un paniere di attività sottostanti di tipo omogeneo, come già nella descrizione del procedimento valutativo di strumenti *multi-name*.

È necessario definire innanzitutto alcune funzioni, tra cui:

- una funzione che permetta la stima del valore del capitale nozionale alla generica data t , definita da⁸

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \frac{L}{n} \cdot 1_{(\tau_i > t)};$$

- la probabilità di osservare un numero k , con $k \in [0, n]$, di attività insolventi nel paniere di riferimento⁹ viene indicata come $P[M(t) = k]$.

⁷ Per una descrizione dettagliata dello strumento si veda la documentazione tecnica fornita da JP Morgan e Morgan Stanley (2003).

⁸ Alla scadenza T l'investitore in questi strumenti si vedrà rimborsare un ammontare pari a $L(T)$, uguale o inferiore al valore nominale sottoscritto, a seconda del verificarsi o meno di *default* nel corso della vita del contratto.

⁹ Per una descrizione di modelli che permettano questo genere di analisi si veda Giesecke (2002) o Esposito (2000).

Queste permettono di definire una ulteriore funzione che rappresenti il valore residuo atteso del portafoglio, che è quindi pari a

$$E[L(t)] = \sum_{k=0}^n \frac{L}{n-k} \cdot P[M(t) = k]$$

Avendo ipotizzato interessi a tasso variabile, le cedole periodiche assumono la forma

$$C(t) = L(t) \cdot [r(t) + s]$$

in cui $r(t)$ è il tasso privo di rischio alla data t e s lo *spread* riconosciuto agli investitori.

Il parametro oggetto di valutazione, in questo caso, è proprio lo *spread* s , che si ricava risolvendo la seguente equazione:

$$E_0 \left[L - \sum_{i=1}^T L(t_i) \cdot [r(t_i) + s] \cdot B(0, t_i) + \sum_{j=1}^n \frac{L}{n} \cdot [1 - R] \cdot 1_{(\tau_j \leq T)} \cdot B(0, \tau_j) - L(T) \cdot B(0, T) \right] = 0$$

Inserendo le funzioni di probabilità si imposta l'equazione di equilibrio e si ricerca il valore dello *spread* s , ovvero del premio riconosciuto agli investitori per il rischio di credito che essi si accollano.

2. APPLICAZIONE AI DATI DI MERCATO.

Si esamina ora una metodologia volta ad implementare il modello in forma ridotta per la valutazione di derivati di credito, partendo dai dati rilevabili sul mercato. Questa è stata sviluppata a partire dalla presentazione del modello fornita da Giesecke (2002) e Li (1998). Per una implementazione in presenza di rischio di controparte si veda Hull e White (2000), oppure Luciano e Cherubini (2003).

Nella valutazione dei singoli strumenti si è inserito un elemento di omogeneità, identificando la durata dei diversi contratti in cinque anni. Si è scelto un orizzonte temporale fissando una scadenza del contratto in esame a cinque anni¹⁰, assicurando come momento di inizio del contratto la data del 1° settembre 2003¹¹.

Allo stesso modo si è voluto fissare l'ammontare del capitale nozionale in 10.000.000 di euro per i contratti di tipo *single-name* e in 60.000.000 nel caso di *multi-name*, ovvero il multiplo dei capitali nozionali relativi alle singole *reference entities*.

Prima di giungere ad una stima del valore di equilibrio dei singoli contratti è necessario definire precisamente alcuni elementi:

- la struttura dei tassi *risk-free*, desunta dalla curva dei tassi Euribor per le scadenze inferiori all'anno e dalla curva dei tassi *swap* per le scadenze superiori all'anno;

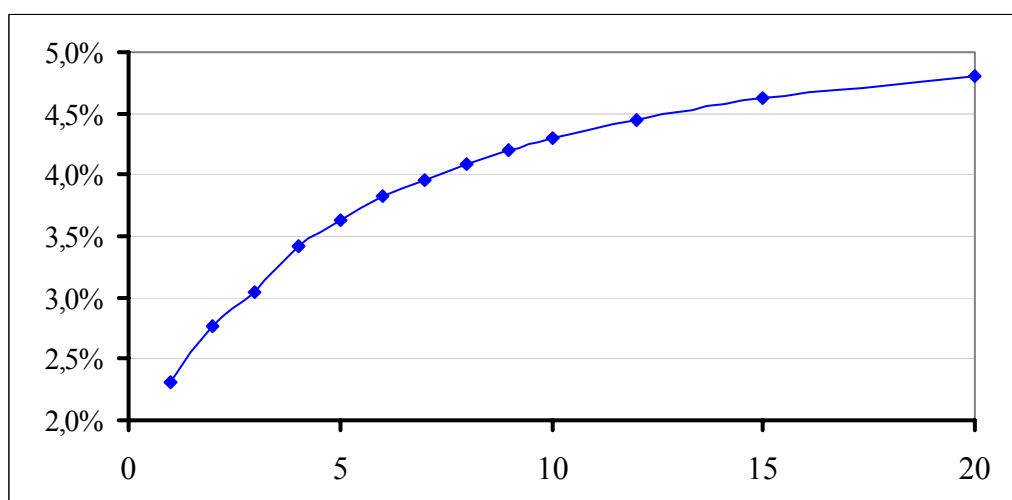


Figura 1: Curva dei tassi per attività prive di rischio. (Fonte Bloomberg).

¹⁰ Scelta operata in considerazione delle quotazioni offerte dagli intermediari riguardanti i *credit default swap*, strumenti che assorbono una parte consistente dell'intero mercato dei *credit derivatives*; in particolare la scadenza a cinque anni è dovuta al fatto che tali strumenti sono molto liquidi su quel segmento di curva e pertanto maggiormente rappresentativi.

¹¹ Questo implica che tutti i dati presentati in seguito si riferiranno al valore rilevato in tale data.

- si è definito un paniere composto da sei *reference entities* con le rispettive emissioni obbligazionarie per non limitare la ricerca ad un singolo emittente e verificare l'efficacia del modello sviluppato¹².

Emittente	Settore	Rating	Paese
Volkswagen	Automobilistico	A	Germania
Renault	Automobilistico	BBB	Francia
Tyco	Chimica	BB	Lussemburgo
Carrefour	Distribuzione	A	Francia
Ahold	Distribuzione	B	Olanda
Vodafone	Telecomunicazioni	A	Regno Unito

Tabella 1: Emittenti selezionati. (Fonte Merrill Lynch).

- il valore di recupero delle attività rischiose è ipotizzato costante¹³ nel tempo e stimato dagli studi statistici pubblicati dalle agenzie di *rating*¹⁴;

Settore	1982-2002	minimo	massimo
Banking	25.4%	1.3%	96.4%
Finance institutions	57.2%	1.0%	98.0%
Industrial	36.9%	0.3%	125.0%
Insurance	32.7%	8.0%	94.5%
Public utilities	62.3%	2.7%	101.3%
Telecom	20.0%	0.3%	91.2%
Transportation	36.6%	1.5%	103.0%
Miscellaneous	32.3%	5.0%	66.0%

Tabella 2: Stime dei tassi medi di recupero per settore. (Fonte Moody's).

¹² Il criterio con cui si è giunti a definire l'insieme è stato assicurare una certa diversificazione settoriale, di classe di *rating* e di Paese in cui ha sede la *parent company*. Inoltre sono state selezionate società che avessero un numero di emissioni, denominate in euro, sufficienti a costruire una curva dei rendimenti.

¹³ Ipotizzare tassi di recupero diversi a seconda del settore di appartenenza della *reference entity* introduce sicuramente una maggiore precisione nella definizione del valore di equilibrio dei contratti derivati di credito. D'altra parte una tale assunzione introduce anche numerose problematiche dovute ad una mancata omogeneità qualora si considerino portafogli di titoli, come avviene nel caso di strumenti di tipo *multi-name*. Per questi ultimi si fisserà pertanto un *recovery rate* costante nel tempo e uguale per qualsiasi soggetto emittente: un valore ragionevole che gli si possa attribuire è pari al 30% del valore nominale del titolo.

¹⁴ Si veda in proposito Moody's (2003).

- la correlazione tra gli emittenti, basati su studi riguardanti le correlazioni delle insolvenza intrasettoriali¹⁵.

		Un anno		Cinque anni		Sette anni	
		IG	NIG	IG	NIG	IG	NIG
Utilities	IG	-0,02	0,17	0,05	1,21	-0,04	0,68
	NIG	0,17	1,34	1,21	-0,75	0,68	-5,35
Insurance	IG	-0,05	0,37	-0,77	-0,02	-1,34	-0,96
	NIG	0,37	0,02	-0,02	-3,99	-0,96	-6,10
Transport	IG	0,00	0,00	-0,12	-0,61	-0,35	-2,27
	NIG	0,00	0,09	-0,61	4,78	-2,27	-0,24
Finance	IG	0,06	0,61	0,42	2,93	0,25	0,00
	NIG	0,61	6,17	2,93	31,76	0,00	39,35
Hi-Tech	IG	2,48	-0,85	2,03	-1,37	0,60	-0,61
	NIG	-0,85	1,12	-1,37	-2,96	-0,61	-4,90
Automotive	IG	-0,09	0,24	0,14	-0,13	0,62	-0,46
	NIG	0,24	0,73	-0,13	2,25	-0,46	-0,74
Service	IG	-0,03	0,35	0,18	1,12	1,00	-3,54
	NIG	0,35	1,64	1,12	6,77	-3,54	2,97
Energy	IG	1,49	2,83	0,67	3,56	0,06	9,57
	NIG	2,83	6,40	3,56	19,08	9,57	18,26

Tabella 3: Correlazioni intrasettoriali. (Fonte Risk Magazine).

¹⁵ Si veda in proposito Nagpal (2001). La tabella descrive le correlazioni esistenti tra soggetti appartenenti al medesimo settore, in funzione del tempo e della classe di *rating* a cui essi appartengono, ovvero *investment grade* (nella tabella indicato come IG) e *non investment grade* (NIG).

2.1. Stima delle intensità di default.

Tra gli emittenti selezionati solo alcune società hanno una serie di titoli che permette di costruire una curva dei rendimenti per scadenze a lungo termine. Ai fini delle successive analisi, tuttavia, questo risulta essere un problema rilevante, poiché è sufficiente che le curve degli emittenti coprano un periodo di almeno cinque anni.

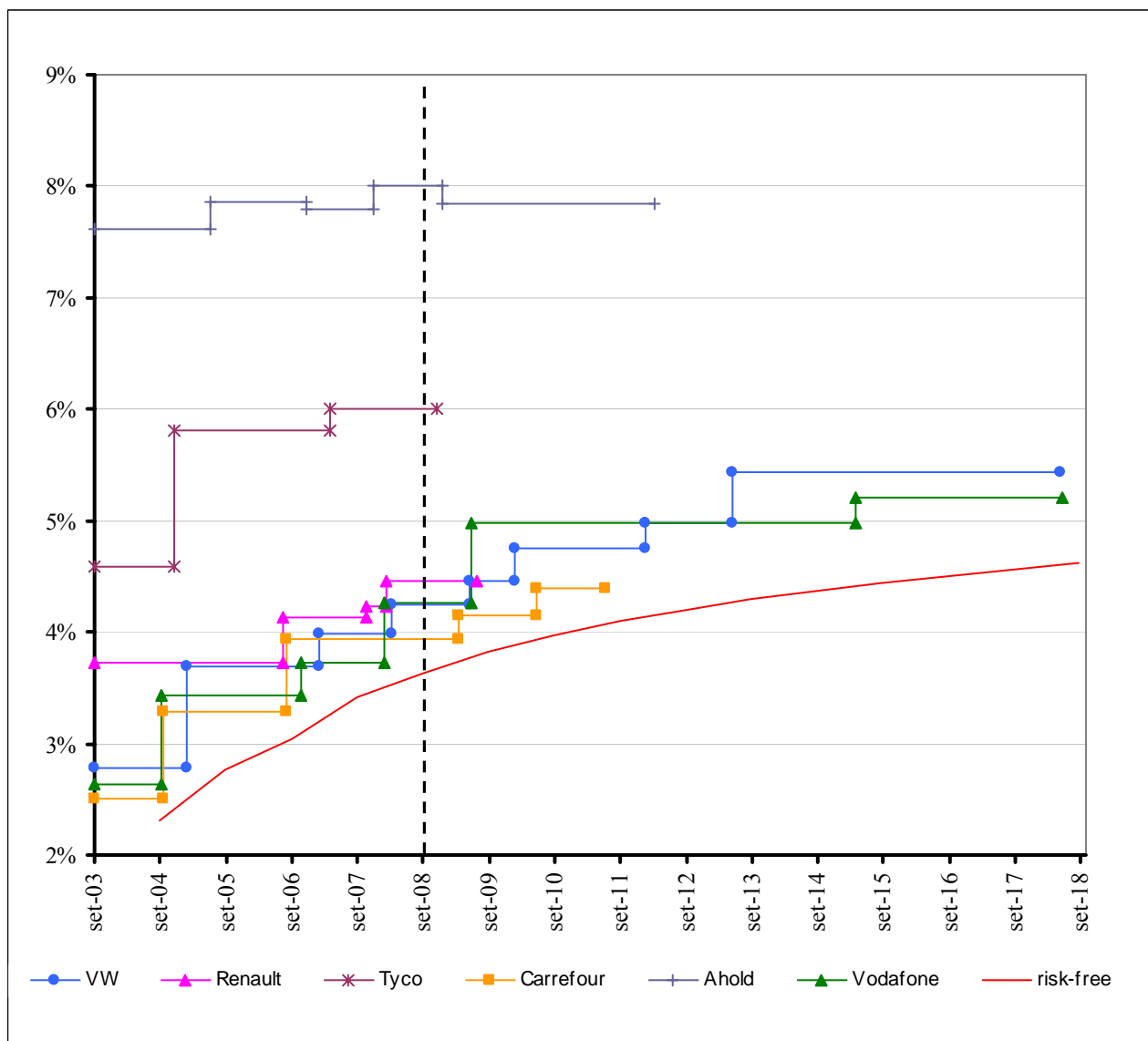


Figura 2: Curve dei rendimenti e confronto con i tassi *risk-free*. (Fonti: Merrill Lynch e Bloomberg).

I rendimenti delle emissioni utilizzati nella valutazione di *credit derivatives*, con scadenza cinque anni, sono riportati nella tabella che segue.

Data	Volkswagen	Data	Renault	Data	Tyco
25/01/2005	2,784%	21/07/2006	3,724%	19/11/2004	4,596%
07/02/2007	3,693%	19/10/2007	4,126%	04/04/2007	5,808%
10/03/2008	3,991%	11/02/2008	4,223%	19/11/2008	6,012%
22/05/2009	4,243%	26/06/2009	4,455%		

Data	Carrefour	Data	Ahold	Data	Vodafone
15/09/2004	2,506%	19/12/2005	7,624%	08/09/2004	2,639%
02/08/2006	3,292%	28/11/2006	7,867%	27/10/2006	3,426%
18/03/2009	3,939%	19/12/2007	7,799%	31/01/2008	3,725%
		17/12/2008	8,007%	27/05/2009	4,258%

Tabella 4: Rendimenti delle obbligazioni del paniere.

I dati sono stati trattati in modo tale da rendere possibile la definizione di intensità annuali di *default*. Nello specifico si sono presi in considerazione intervalli di tempo annuali, ipotesi che non condiziona in maniera rilevante i risultati ottenuti, ma permette una maggiore semplicità di calcolo¹⁶. Da queste vengono ricostruite le funzioni indispensabili per la valutazione delle varie tipologie di derivati creditizi.

Le intensità di *default* dei titoli in esame¹⁷ ottenute sono pertanto le seguenti:

Epoca	Volkswagen	Renault	Tyco	Carrefour	Ahold	Vodafone
1	0,004537	0,011344	0,034915	0,002552	0,074505	0,003938
2	0,006473	0,011344	0,040120	0,003905	0,074021	0,004060
3	0,007778	0,011301	0,041581	0,003888	0,072402	0,004062
4	0,007587	0,010961	0,040379	0,003024	0,068212	0,002979
5	0,007510	0,011202	0,038636	0,003024	0,066861	0,004714
Recovery	37%	37%	37%	32%	32%	20%

Tabella 5: Funzioni di intensità degli emittenti.

Come si può notare le intensità medie sono anche molto diverse tra le varie *reference entities*: è quindi agevole l'identificazione degli emittenti che hanno un *rating* di tipo *investment grade* e dei due (Ahold e Tyco) che invece hanno una qualità creditizia meno robusta e sono classificati come *speculative grade*.

¹⁶ Si ricorda l'intensità di *default* viene definita come $\lambda = -\frac{1}{t} \cdot \ln \left[\frac{D(0, t) - R \cdot e^{-rt}}{(1 - R) \cdot e^{-rt}} \right]$.

¹⁷ Il *recovery rate* impiegato nella stima delle intensità di *default* è stato ricavato dal valore medio dei tassi di recupero settoriali presentati in tabella 2.

Le informazioni sulle intensità di *default* permettono ora di calcolare le altre informazioni indispensabili alla valutazione dei contratti derivati di credito, quali le curve di sopravvivenza¹⁸ e le probabilità di osservare l'insolvenza, che sono riportate nella tabella che segue.

Epoca	Volkswagen	Renault	Tyco	Carrefour	Ahold	Vodafone
1	0,004517	0,011216	0,033717	0,002545	0,069155	0,003923
2	0,006402	0,011089	0,037220	0,003880	0,063804	0,004027
3	0,007634	0,010923	0,037004	0,003848	0,058050	0,004014
4	0,007389	0,010479	0,034512	0,002984	0,051084	0,002934
5	0,007260	0,010591	0,031771	0,002975	0,046834	0,004622

Tabella 6: Probabilità di *default* alle singole epoche.

2.2. Valutazione di *credit default swap*.

Tramite le relazioni sinora ricavate dalle informazioni desumibili dal mercato è quindi possibile procedere alla valutazione di uno dei contratti derivati di credito di tipo *single-name*, il *credit default swap*.

Si intende ora calcolare il premio periodico K , tale per cui l'acquirente della protezione acquista il diritto ad ottenere il rimborso della perdita subita in caso di *default* della *reference entity*. A titolo esemplificativo si sviluppano i calcoli per l'emittente Volkswagen.

Fissato un valore nozionale del contratto pari a 10.000.000 €, si ricava come primo elemento il valore atteso in zero della *default leg*, come definito nei paragrafi precedenti. Esso vale 188.618 €.

Epoca	$P[\tau = t_i]$	$P[\tau = t_i] \cdot L \cdot [1 - R] \cdot B(0, t_i)$
1	0,004517	27.804
2	0,006402	38.158
3	0,007634	43.894
4	0,007389	40.612
5	0,007260	38.149
		188.618

Tabella 7: *Default leg* per la *reference entity* Volkswagen.

¹⁸ Da queste si ricavano facilmente le funzioni di ripartizione $F(t)$ dalla relazione $F(t) = 1 - S(t)$

Affinchè si realizzi un equilibrio tra le due parti, la corrispondente *premium leg* dovrà assumere un valore pari a quello della *default leg*. L'ammontare del premio periodico che assicura tale equilibrio è pari a 40.530 € annui, equivalente ad un premio periodico di circa 41 *basis points* per unità di capitale (ovvero lo 0,41%).

Sulla base di tale premio si ricava la struttura della *premium leg*:

Epoca	$P[\tau > t_i]$	$K \cdot P[\tau > t_i] \cdot B(0, t_i)$
0	1	40.530
1	0,995473	39.423
2	0,989050	37.924
3	0,981387	36.303
4	0,973969	34.438
		188.618

Tabella 8: Premium leg per la reference entity Volkswagen.

Applicando la medesima metodologia si ricavano i premi, espressi in *basis points* per unità di nominale, relativi ai diversi titoli inclusi nel paniere.

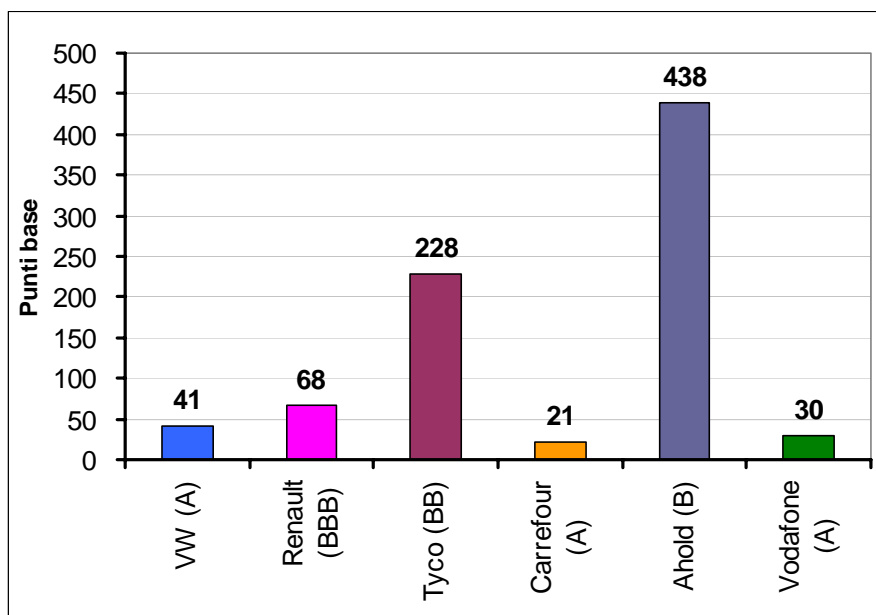


Figura 3: Premi in *basis points* per un *credit default swap*.

Lo studio dei contratti *credit default swap* è sostenuto dalla possibilità di operare un confronto con quotazioni fornite dai principali intermediari finanziari. Questi strumenti infatti stanno

assumendo una importanza sempre più rilevante sui mercati finanziari e molti intermediari propongono costantemente quotazioni di questi strumenti¹⁹.

Si consideri, ad esempio, la quotazione di *credit default swap*, pubblicate da JP Morgan sul sistema di contrattazione *online* Orbit²⁰, in cui l'entità di riferimento è Volkswagen:

	1 anno		3 anni		5 anni		7 anni		10 anni	
	Bid	offer	bid	offer	bid	offer	bid	offer	bid	offer
Volkswagen	16	22	30	36	41	46	42	48	44	50

Tabella 9: Quotazioni *credit default swap*. (Fonte JP Morgan).

Le quotazioni proposte nella tabella 9 si riferiscono ai prezzi rilevati nel corso della giornata del 1° settembre 2003. Esse non sono quotazioni di chiusura ufficiale, per cui possono essere influenzate da eventuali movimenti anomali nella domanda. Si preferisce quindi utilizzare come parametro di confronto le quotazioni *mid-market*, ovvero il valore medio del prezzo del *credit default swap* rilevato su tutta la giornata di contrattazioni.

Il confronto ha una valenza puramente empirica, ovvero il suo scopo è di testare l'attendibilità del costo della protezione dal rischio di credito tramite un *credit default swap*. Non sono disponibili infatti informazioni precise sul metodo di calcolo del prezzo e dei parametri utilizzati²¹ dagli intermediari finanziari.

Fatta questa premessa, si procede ad un confronto ed a un'analisi tra i valori teorici stimati tramite il modello in forma ridotta e quelli di mercato, per le varie *reference entities* esaminate, sulla scadenza a cinque anni.

¹⁹ Le quotazioni dei *credit default swap* solitamente vengono proposte sotto una determinata forma: i prezzi sono relativi alle varie *reference entity* e non ad una emissione obbligazionaria in particolare, il premio è espresso in *basis points*, vengono quotate diverse scadenze, solitamente a un anno, a tre anni, a cinque anni, a sette anni e a dieci anni (tuttavia le più trattate sono quelle a cinque anni) e vengono proposti due valori relativi alla quotazione *bid* (per cui l'intermediario è disposto ad assumere la posizione di acquirente della protezione) e la quotazione *offer* (alla quale l'intermediario assume la veste di venditore della protezione).

²⁰ L'intermediario non ha l'obbligo di fornire quotazioni per tutte le scadenze, ma nel momento in cui fornisce un prezzo deve sicuramente fornire sia la quotazione denaro che quella lettera.

²¹ Si consideri comunque che i modelli utilizzati generalmente sono implementati in pacchetti di software che utilizzano adattamenti dall'approccio strutturale. I metodi di stima dei parametri, ed in particolare della volatilità, impiegati non sono però informazioni di pubblico dominio. In particolare JP Morgan dal 1997 utilizza il modello CreditMetrics.

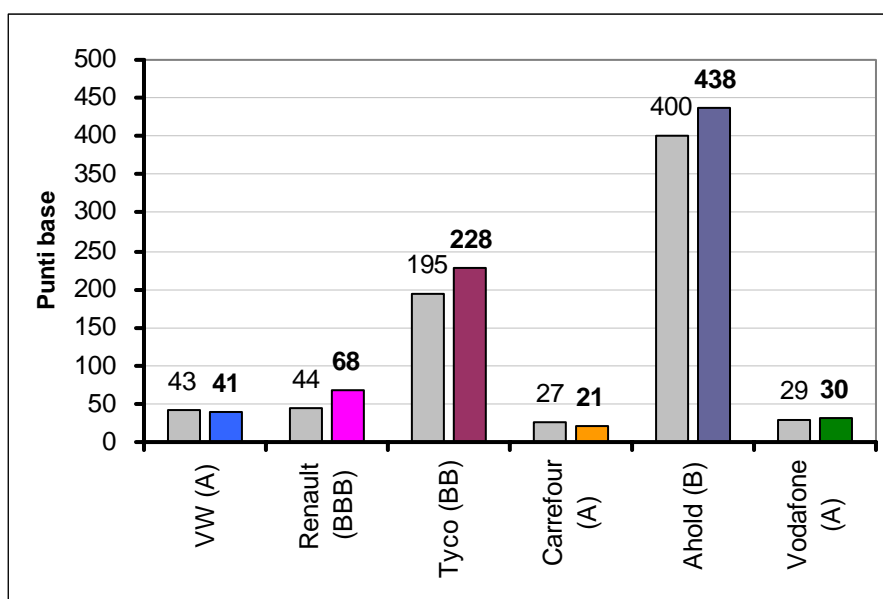


Figura 4: Confronto tra le quotazioni fornite da JP Morgan (in grigio) ed i prezzi di equilibrio ricavati dal modello.

I premi ricavati dal modello in forma breve per gli emittenti ad elevato merito creditizio sono sostanzialmente allineati con le quotazioni fornite da JP Morgan.

Una anomalia riguarda il costo del *credit default swap* con *reference entity* Renault: la quotazione è molto simile a quella fornita per Volkswagen, da cui emerge che la rischiosità delle due società su un orizzonte temporale di cinque anni è apparentemente la medesima. Tale prospettiva è soggetta a molte critiche, in quanto Renault presenta innanzitutto un *rating* inferiore all'altra società automobilistica, ed i rendimenti delle obbligazioni emesse dalla società francese sono sistematicamente superiori a quelli di Volkswagen. Questo porta a confermare che, in una situazione di equilibrio, il costo di una eventuale protezione nei confronti di Renault deve essere maggiore rispetto a quanto si richiede per la società tedesca.

Per quanto riguarda invece i due emittenti *non investment grade*, Ahold e Tyco, le differenze tra i valori di equilibrio e i dati di mercato sono più marcate: a questo proposito va tenuto presente che la forbice tra le quotazioni denaro e lettera è molto più pronunciata per livelli maggiori di rischio. Questo rende il prezzo di *mid-market* meno rappresentativo in senso assoluto.

Nel confronto è necessario tenere presenti alcuni ulteriori elementi che inducono a una distorsione relativa sia al modello che ai valori dei *credit default swap* di mercato. Per quanto riguarda il modello sviluppato esso parte dai dati di mercato che, in quanto tali, possono presentare alcune imperfezioni.

Tra le più evidenti si ricorda che:

- alcune curve di credito non sono ben definite su tutte le scadenze, per cui alcune intensità di *default* sono frutto di stime, basate su dati relativi a scadenze successive;
- la scarsa liquidità di alcuni titoli può influenzare il prezzo e quindi i rendimenti in modo marcato;
- alcune emissioni possono presentare clausole²² di *step-up* o *step-down* della cedola che influiscono sul valore del titolo.

Accanto a questi elementi ci sono fattori che producono altrettanti distorsioni nelle quotazioni fornite dagli intermediari:

- i *credit default swap* sono spesso impiegati come strumento per coprire il rischio di credito di altri strumenti finanziari (ad esempio *credit linked notes*), per cui si possono verificare fenomeni relativi alla domanda che influenzano la quotazione rispetto al loro *fair value*²³;
- la liquidità di questi contratti è generalmente buona, ma risente delle differenze tra denaro e lettera e di giorni particolari in cui il mercato può essere poco liquido.

2.3. Valutazione di first to default swap.

Lo strumento *multi-name* che trova una implementazione di maggiore semplicità è il *basket default swap*, nella variante *first to default swap*. Con questo contratto l'acquirente della protezione si copre dal rischio di credito di un portafoglio limitatamente al verificarsi di un singolo *default*. La remunerazione offerta alla controparte consiste in una serie di premi periodici pagati fino al verificarsi del primo evento di credito o, se non si verifica l'insolvenza, sino al periodo precedente la conclusione del contratto, come avviene per contratti di *credit default swap*.

Si è fissato un capitale nozionale pari a 60.000.000 euro, riferiti al paniere di sei titoli sinora descritto, il cui singolo *default* è assicurato per un valore massimo di 10.000.000 €. In realtà, si ipotizza un *recovery rate* pari al 30% per ogni emittente, in modo tale che il *payoff* in caso di *default* del primo titolo sia pari a 7.000.000 €.

²² Non è comunque il caso delle emissioni considerate in questa analisi.

²³ Questa considerazione prescinde dal modello impiegato nel calcolo del prezzo di equilibrio.

Ciò presuppone un ricalcolo delle intensità di *default* λ_i ²⁴, a cui si aggiunge la determinazione della probabilità di sopravvivenza del portafoglio $P[\tau_1 > t, \dots, \tau_n > t]$ e la probabilità $P[\tau_1 = t, \dots, \tau_n = t]$, che rappresenta la probabilità di osservare una insolvenza all'epoca t . I valori assunti dalle due funzioni sono riportate allegate alla descrizione analitica dei flussi attesi che segue.

Come avveniva per i *credit default swap* anche in questo caso è possibile individuare una *default leg*:

Epoca	$P[\tau_1 = t, \dots, \tau_8 = t]$	$L \cdot P[\tau_1 = t, \dots, \tau_8 = t] \cdot [1 - R] \cdot B(0, t)$
1	0,109537	749.213
2	0,101645	673.133
3	0,089586	572.353
4	0,074492	454.901
5	0,065422	381.982
		2.831.583

Tabella 10: Default leg per un first to default swap.

Utilizzando la medesima procedura sviluppata per i *credit default swap* si ricava l'ammontare della *premium leg*, pari a 2.831.583 €, e quindi il valore del premio periodico pagato dall'acquirente della protezione alla controparte. Quest'ultimo vale 757.304 € annui, ovvero circa 126 *basis points* per unità di capitale.

Epoca	$P[\tau_1 > t, \dots, \tau_8 > t]$	$W \cdot P[\tau_1 > t, \dots, \tau_8 > t] \cdot B(0, t)$
0	1	757.304
1	0,883382	653.680
2	0,774768	555.086
3	0,679004	469.321
4	0,599688	396.192
		2.831.583

Tabella 11: Premium leg per un first to default swap.

²⁴ Sulla base del modello per la valutazione del rischio di credito di più attività sottostanti, descritto da presentati da Giesecke (2002). Sono stati considerati un totale di otto *shocks*, su di un totale teorico di 63, che influiscono sull'insieme selezionato: sei agiscono sui singoli emittenti, mentre altri due inducono all'insolvenza congiunta di due emittenti appartenenti al medesimo settore (Carrefour e Ahold per la distribuzione, Volkswagen e Renault per l'automobilistico). Per questi ultimi due *shocks* bisogna tenere presente del parametro di correlazione intrasettoriale, stimato nella tabella 3.

Il premio trovato deve soddisfare necessariamente due condizioni, deve quindi essere:

- superiore al premio di un contratto *credit default swap* che abbia come attività sottostante il titolo più rischioso tra quelli presenti nel paniere di riferimento;
- inferiore alla somma dei premi relativi a sei distinti contratti di *credit default swap* stipulati rispetto ai singoli emittenti inclusi nel paniere di riferimento²⁵.

L'ammontare dei premi per i singoli emittenti inseriti come entità di riferimento in contratti *credit default swap* sono stati calcolati per un capitale nozionale di 10.000.000 € e un *recovery rate* del 30%, per potere essere confrontati con il premio del *first to default swap* in esame.

Emittente	Premio
Volkswagen	40.511
Renault	67.483
Tyco	227.442
Carrefour	21.441
Ahold	437.509
Vodafone	30.353
Totale	824.739

Tabella 12: Premi di *credit default swap* stipulati nei confronti delle singole *reference entities*.

Il premio più alto è relativo alla copertura del rischio di credito della società Ahold ed è pari a 437.509 euro, mentre la somma dei sei premi è pari a 824.739 euro. Il premio ricavato per un contratto *first to default swap* che ha come paniere di riferimento i sei emittenti esaminati risulta quindi soddisfare le condizioni sopra esposte.

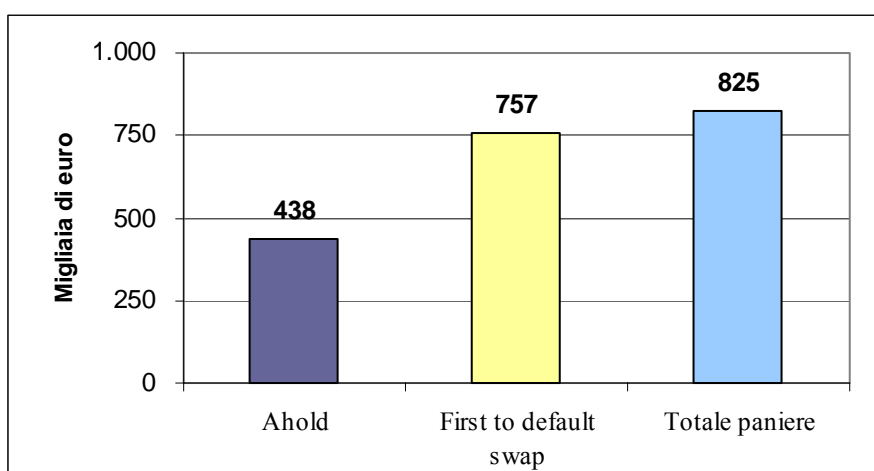


Figura 5: Premio di un *first to default swap* e confronto con gli estremi.

²⁵ Se non venisse rispettata la prima condizione, il venditore della protezione non troverebbe conveniente stipulare il contratto. Invece se il premio del *basket default swap* risultasse essere superiore alla somma dei singoli contratti di tipo *single-name* l'acquirente della protezione troverebbe più conveniente stipulare contratti separati e ottenere anche un livello di protezione superiore.

2.4 Valutazione di indici di credit default swap.

Si è voluto definire il medesimo insieme di attività sottostanti sinora utilizzato, anche se gli strumenti trattati sui mercati includono negli indici di *credit default swap* un numero molto maggiore di soggetti rischiosi. Allo stesso modo si è pertanto definito un valore nominale del contratto pari a 60.000.000 €, con scadenza a cinque anni e si è assunto che ognuna delle sei attività sottostanti avesse un *recovery value* costante e pari al 30%.

Sulla base di questi dati relativi al paniere di sei titoli esaminato è possibile innanzitutto determinare la probabilità di osservare il *default* di un qualsiasi numero di soggetti inclusi nel paniere alle diverse epoche:

<i>k default</i>	1° anno	2° anno	3° anno	4° anno	5° anno
0	0,864792	0,736568	0,662026	0,622449	0,561135
1	0,125625	0,225208	0,273053	0,295099	0,324220
2	0,009124	0,034429	0,056310	0,069952	0,093666
3	0,000442	0,003509	0,007742	0,011055	0,018040
4	0,000016	0,000268	0,000798	0,001310	0,002606
5	0,000000	0,000016	0,000066	0,000124	0,000301
6	0,000000	0,000001	0,000005	0,000010	0,000029
Totale	1	1	1	1	1

Tabella 13: Probabilità di *k default* alle varie epoche.

Da queste probabilità si risale quindi alla struttura del valore atteso del nozionale del contratto: bisogna tenere presente che l'insolvenza di ognuna delle sei attività sottostanti riduce tale ammontare di 10.000.000 €.

<i>k default</i>	$L(t)$	1° anno	2° anno	3° anno	4° anno	5° anno
0	60.000.000	51.887.540	44.194.080	39.721.587	37.346.966	33.668.086
1	50.000.000	6.281.241	11.260.420	13.652.633	14.754.942	16.211.020
2	40.000.000	364.980	1.377.166	2.252.410	2.798.085	3.746.653
3	30.000.000	13.255	105.268	232.252	331.638	541.199
4	20.000.000	321	5.364	15.965	26.205	52.117
5	10.000.000	5	164	658	1.242	3.011
6	0	0	0	0	0	0
Totale	10.000.000	58.547.337	56.942.299	55.874.847	55.257.836	54.219.075

Tabella 14: Valore nominale atteso alle diverse epoche.

Una ultima elaborazione riguarda i tassi annui di interesse *risk-free* relativi ai diversi momenti in cui vengono pagate le cedole, direttamente ricavate dalla struttura dei tassi proposta in figura 1.

Epoca	$r(t)$
1	2,315%
2	3,232%
3	3,592%
4	4,252%
5	4,492%

Tabella 15: Tassi di interesse annui per attività prive di rischio.

Sulla base di queste informazioni si è in grado di ricostruire lo schema dei flussi di cassa e del *payoff* di una emissione il cui sottostante sia un indice di *credit default swap*, in modo tale che il totale sia nullo, attraverso una scelta opportuna del valore della *premium leg*.

Movimento	Valore atteso scontato
Incasso del valore emesso	+ 60.000.000
Default leg	+ 11.905.260
Premium leg	- 17.686.186
Ammontare rimborsato agli investitori	- 54.219.075
	0

Tabella 16: Flussi di cassa in equilibrio, dal punto di vista del soggetto emittente.

Lo *spread* che permette di raggiungere questo equilibrio è pari a 504 *basis points*. Questo implica che il tasso cedolare venga calcolato sommando tale *spread* ai tassi in vigore al momento del pagamento degli interessi sul titolo emesso²⁶.

²⁶ Il cui valore teorico al 1° settembre 2003 è riportato nella tabella 15.

CONCLUSIONI.

In questa serie di *working papers* si è voluto analizzare i diversi modelli per la valutazione del rischio di credito. L'applicazione di questi è stata quindi sviluppata per strumenti che esprimono al meglio la gestione di tale tipologia di rischio, i *credit derivatives*.

L'interesse per i contratti derivati di credito è sempre più vivo, in quanto si tratta di strumenti finanziari a larga diffusione ed in costante evoluzione, come dimostra ad esempio l'introduzione di indici di *credit default swap*, innovazione introdotta di recente sui mercati e che ha presto guadagnato consenso tra gli operatori.

Tramite la metodologia descritta e sviluppata in questo ultimo lavoro si è voluto appunto dimostrare come gli studi sul tema del rischio di credito permettano, a partire dai dati di mercato, una valutazione, seppur perfettibile, delle probabilità di fallimento e del valore equo dei derivati di credito.

Per una discussione più approfondita della valutazione di derivati di credito, tra cui i *collateralized debt obligations*, si veda Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004).

Riferimenti bibliografici.

- Bielecki T., Rutowski M., *Credit Risk: modeling, valuation and hedging*, Springer, 2002.
- Documentazione tecnica, *JECI – The JP Morgan european credit index*, JP Morgan Credit Research, 2002.
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula methods for finance*, John Wiley and Sons, 2004.
- Esposito M., *Il default nei modelli matematico-statistici*, Banca Commerciale Italiana, 2000.
- Giesecke K., *An exponential model for dependent default*, Humboldt-Universität zu Berlin, 2002.
- Giesecke K., *Credit risk modeling and valuation: an introduction*, Cornell University, 2003.
- Hamilton D., Cantor R., Ou S., *Default and recovery rates of corporate bond issuers, a statistical review of Moody's ratings performance 1920-2002*, Moody's investor service, 2003.
- Hull J., White A., *Valuing credit default swap II: modelling default correlations*, University of Toronto, 2000.
- Li D., *Constructing a credit curve*, Risk Magazine, 1998.
- Li D., *The valuation of the ith-to-default basket credit derivatives*, RiskMetrics Group, 1999.
- Luciano E., Cherubini Umberto, *Pricing and hedging vulnerable credit derivatives with copulas*, Università di Torino, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Umane, 2003.
- Nagpal K., *Measuring default correlation*, Risk Magazine, marzo 2001.