



# ***Approcci matematico-statistici alla valutazione del rischio di credito.***

**a cura di Alessandro Matta**

1. Introduzione.....	1
1.1 Il rischio di credito.....	2
2. I modelli strutturali.....	4
2.1 Il modello di Merton.....	4
2.2 Il meccanismo del primo passaggio.....	9
2.3 Probabilità congiunte di default.....	11
3. I modelli in forma ridotta.....	13
3.1 Il default come evento di Poisson.....	13
3.2. Il valore di recupero.....	16
3.3 Stima delle intensità di default.....	18
3.4. Estensione del modello in forma ridotta al caso multivariato.....	19
Riferimenti bibliografici.....	21

Si ringrazia la Prof.ssa Elisa Luciano  
per l'assistenza e la supervisione fornita nel corso del lavoro.

In collaborazione con



## ***1. INTRODUZIONE.***

I fallimenti degli intermediari finanziari sono spesso originati da una eccessiva e incontrollata esposizione economica verso specifici gruppi di creditori che vanno incontro a particolari stati di difficoltà. Nel recente passato si sono verificate crisi di alcuni mercati<sup>1</sup> oppure *crack* societari<sup>2</sup> inattesi che, sebbene determinati da fattori molto differenti tra loro, mostrano in modo inequivocabile la centralità del rischio di credito.

Il risultato è una sempre maggiore necessità di modelli per la valutazione del rischio di credito efficienti, per una molteplicità di scopi che vanno dal *marking to market* di attività scarsamente liquide, al calcolo di coefficienti economici e patrimoniali ed al *risk management* di portafoglio. Inoltre si osserva una sempre più pressante richiesta di modelli che permettano di addentrarsi e comprendere i meccanismi che regolano eventi estremi quali insolvenze o bancherotte.

Attualmente è stata sviluppata un'ampia gamma di modelli, il cui fine è la definizione e la stima del rischio di credito. La classificazione di questi modelli si può, in prima battuta, articolare su due metodologie:

- approccio strutturale (*firm's value models*);
- approccio in forma ridotta (*intensity models*);

In prima approssimazione i modelli che fanno uso di un approccio strutturale hanno la caratteristica di descrivere la struttura interna dell'emittente in modo tale da definire il verificarsi del fallimento oppure del *default* come diretta conseguenza di un avvenimento interno.

L'approccio in forma ridotta non tenta di precisare le ragioni dell'evento, ma piuttosto si concentra sulla probabilità che accada il *default* stesso.

A queste due famiglie di modelli può esserne affiancata una terza: sono i modelli che utilizzano un approccio di tipo 'ibrido', in quanto uniscono elementi degli altri due nel tentativo di superare alcuni limiti<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Tra le numerose crisi che hanno colpito in modo rilevante alcuni mercati si ricordano le principali osservate negli ultimi anni, ovvero i mercati asiatici nel 1997, la Russia nel 1998 e l'Argentina nel 2002.

<sup>2</sup> A titolo puramente esemplificativo si pensi ai casi di Enron e Worldcom nel 2002, oppure alle italiane Cirio e Parmalat a cavallo tra il 2003 e il 2004.

<sup>3</sup> Questo approccio spesso non viene considerato realmente autonomo: infatti i modelli che potrebbero rientrare nell'approccio 'ibrido' per lo più nascono come modelli di tipo strutturale o in forma ridotta, a cui vengono inseriti elementi derivati dall'approccio alternativo.

Ciononostante non si è giunti alla determinazione di un modello che, per gli obiettivi limiti dettati dalle assunzioni sottostanti, presenti una soluzione univoca tale da soddisfare appieno le più diverse esigenze operative.

Lo scopo della trattazione è comunque fornire un quadro generale di questi modelli, mentre per una descrizione più approfondita si rimanda in particolare a Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), Duffie e Singleton (2003) ed a Schönbucher (2003).

### ***1.1 Il rischio di credito.***

In generale, per rischio si intendono “le condizioni in cui un soggetto economico prende decisioni tali per cui a ogni singola decisione corrispondono delle conseguenze che sfociano in particolari ‘stati del mondo’ e il soggetto attribuisce determinate probabilità a ciascuno stato del mondo; qualora il soggetto economico non attribuisca probabilità ai diversi stati del mondo, [...], si parla di incertezza”<sup>4</sup>.

Il rischio nell’attività finanziaria invece rappresenta la possibilità di perdita che un determinato patrimonio può subire in conseguenza di determinati eventi.

Con il termine rischio di credito in particolare si intende la possibilità che una variazione inattesa del merito creditizio di una controparte, nei confronti della quale esiste una esposizione, generi una corrispondente variazione inattesa del valore di mercato della posizione creditoria; al limite tale riduzione ha come risultato l’annullamento del valore del credito stesso.

In altre parole il rischio di credito rappresenta il rischio di perdite dovute all’incapacità della parte verso cui si è assunta una esposizione creditizia di adempiere alle proprie obbligazioni di pagamento. Alle scadenze previste dal contratto infatti la controparte può rivelarsi insolvente in misura totale o parziale, sia per quanto riguarda il rimborso del capitale che per il pagamento degli interessi maturati su tale capitale.

Il rischio di credito viene sovente definito come rischio di solvibilità<sup>5</sup> in quanto è legato alla possibilità che i debitori vengano a trovarsi nelle condizioni di non poter fronteggiare puntualmente

---

<sup>4</sup> Boselli, voce “Alea” in *Novissimo Dizionario Italiano* (1958), pag. 469.

<sup>5</sup> Il rischio di credito può essere distinto in rischio di controparte e in rischio specifico; quest’ultimo è una componente del rischio di mercato di cui si tratterà in seguito. Normalmente, invece, con il termine rischio di credito si intende più propriamente il rischio di controparte.

i propri impegni. In questa accezione si distinguono diverse fattispecie di queste difficoltà a fare fronte ai propri impegni, le cui conseguenze sono gli stati<sup>6</sup> di:

- bancarotta, il classico fallimento del soggetto rischioso;
- decadenza del beneficio del termine, per cui i titoli di debito emessi diventano esigibili prima del termine originario previsto;
- inadempimento dell'obbligazione, il *default* in senso stretto;
- mancato pagamento;
- ripudiazione o moratoria, quando il debitore disconosce oppure impugna la validità di uno o più titoli di debito;
- ristrutturazione del debito, se si modificano i termini ed i modi previsti dal contratto sulla base di un accordo tra l'emittente ed i titolari del titolo di debito.

Il rischio di credito va distinto in tre tipologie:

- rischio di credito pieno (*full credit risk*): consiste nel rischio che la controparte non adempia alla propria obbligazione quando dovuta, e non sia in grado di adempiere in futuro nella sua interezza a causa della propria insolvenza;
- rischio di consegna (*delivery risk*): esiste soltanto quando le parti hanno reciproche obbligazioni da eseguirsi contemporaneamente e consiste nel fatto che una parte adempia al proprio obbligo di pagamento o consegna, non ricevendo contestualmente la consegna o il pagamento di quanto dovuto dalla controparte;
- rischio di sostituzione (*substitution risk*): è presente nei contratti a termine con prestazioni corrispettive (da eseguirsi, di norma, contemporaneamente), e consiste nel maggiore costo oppure nel mancato guadagno che la parte solvente (detta *in bonis*) sopporta qualora la controparte diventi insolvente prima della scadenza pattuita; in tal caso la parte *in bonis* si asterrà dall'effettuare la propria consegna alla parte insolvente, e per procurarsi quanto avrebbe dovuto ricevere dalla parte insolvente (in cambio della propria consegna) dovrà stipulare un nuovo contratto che potrebbe avere un costo o un utile diverso da quello precedente.

Il rischio di credito è influenzato sia dal ciclo economico che da eventi specifici dell'impresa: comunque la tendenza è generalmente quella di una riduzione durante le fasi di espansione economica e ad un aumento durante i periodi di recessione<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup> Si vedano in proposito le definizioni di evento di credito (*credit event*) fornite dalla ISDA in *Credit Derivatives Definitions*, 2003.

## **2. I MODELLI STRUTTURALI.**

L'approccio in forma strutturale per i modelli di rischio di credito tenta di descrivere attraverso le caratteristiche intrinseche di un emittente di titoli di debito l'andamento del valore complessivo delle attività della società oggetto di studio. Formalmente, tale valore è rappresentato da un cosiddetto processo stocastico.

Questi modelli sono stati anche denominati *firm value models* in quanto il processo alla base del modello di valutazione è il valore dell'impresa. Come già implicito nel loro nome, i modelli basati su tale approccio sono più indicati allo studio di emittenti *corporate*. Per emittenti *sovereign* invece il concetto di valore complessivo dell'attivo risulta essere molto più sfumato. Ciononostante sono stati compiuti tentativi per adattare questo approccio anche al rischio paese, impiegando indicatori degli stock nazionali in qualità di *proxies* del valore dell'impresa<sup>8</sup>.

Storicamente questo tipo di approccio è stato il primo tentativo di fornire un modello quantitativo del rischio di credito con finalità di valutazione. I primi lavori in questo campo sono gli studi compiuti da Merton nel 1974 sulla base del modello di Black e Scholes (1973).

### **2.1 Il modello di Merton.**

All'interno dell'approccio in forma strutturale, il modello più studiato e sviluppato è senz'altro quello proposto da Merton<sup>9</sup>.

Si assume che la struttura del capitale di una qualunque impresa sia costituito da:

- il debito, con un ammontare nozionale pari a  $K$ , emesso sotto forma di *zero coupon bond* aventi una scadenza  $T$  e un valore al tempo  $t$  pari a  $D(t, T)$ ;
- un ammontare di capitale proprio, in forma di azioni, avente valore a oggi uguale a  $S(t)$ .

Per ogni momento antecedente alla scadenza del debito, ovvero  $\forall t \leq T$ , viene definito il valore totale degli *asset* dell'impresa  $V(t)$ .

---

<sup>7</sup> Si veda in proposito King, McGinty e Due (2002).

<sup>8</sup> Si veda in proposito Lehrbass (2000).

<sup>9</sup> Il lavoro originale è stato pubblicato sul Journal of Finance nel 1974.

Il valore del capitale proprio e il valore dei titoli di debito sono collegati al valore della società tramite la seguente relazione:

$$V(t) = S(t) + D(t, T)$$

L'assunto fondamentale nel modello di Merton è che l'insolvenza, o più in generale il *default*, dei titoli di debito emessi possa avvenire esclusivamente alla loro scadenza: infatti, essendo stati ipotizzati titoli privi di cedola, l'unico periodo in cui avviene un pagamento è proprio la scadenza  $T$ .

Dalla struttura del capitale dell'impresa è possibile determinare direttamente il valore alla scadenza dei titoli di debito emessi<sup>10</sup>:

- se il valore dell'impresa  $V(t)$  alla scadenza  $T$  risulta essere maggiore del valore del debito emesso, allora la società è solvente e i titoli valgono il loro valore nominale;
- se il valore dell'impresa è invece minore del valore di riscatto dei titoli, allora la società è insolvente e viene dichiarato il *default*: i detentori dei titoli hanno il diritto di rivalersi sull'attivo della società fino al raggiungimento di quanto spetta loro.

Il *payoff* alla scadenza per i detentori delle obbligazioni sarà pertanto  $D(T, T) = \min\{V(T), K\}$ . Di conseguenza ciò significa per gli azionisti avere il diritto al risarcimento della frazione rimanente dopo avere soddisfatto i creditori, ovvero  $S(T) = \max\{V(T) - K, 0\}$ .

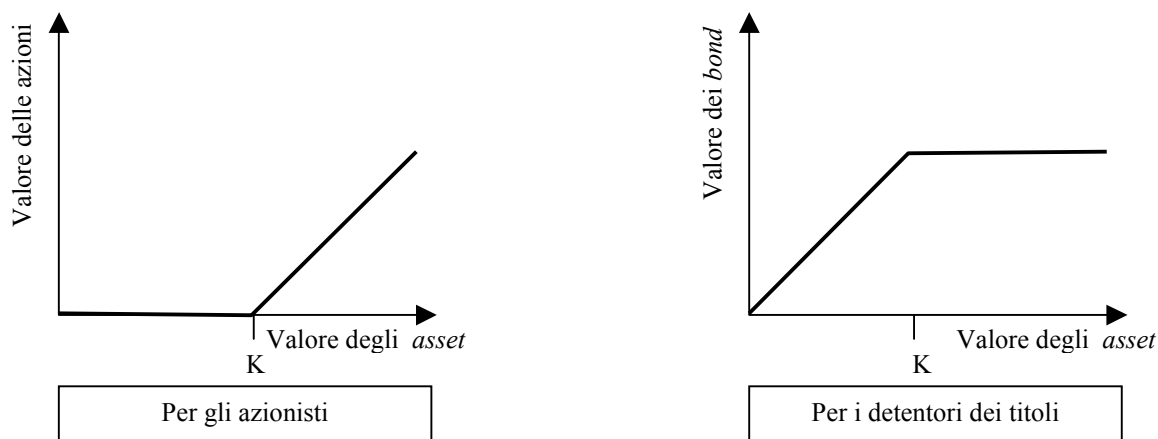


Figura 1: *Payoff* per le due classi di *stakeholders*.

<sup>10</sup> Il valore di recupero in caso di insolvenza è pertanto considerato endogeno al modello: esso non dipende in nessun modo da fattori economici o finanziari esterni.

Dall'analisi dei profili sopra riportati è possibile sostenere che il valore a scadenza per le due categorie di *stakeholders* della società sia ben rappresentato dal profilo a scadenza di una generica opzione:

- la posizione dei detentori delle azioni societarie può venire assimilata all'acquisto di una opzione *call* di tipo europeo con *strike price*  $K$ : se a scadenza il valore delle azioni della società al netto del debito è positivo, allora l'opzione viene esercitata per entrare in possesso del valore residuo dell'impresa; altrimenti l'opzione non viene esercitata ed il valore rimanente delle attività sociali è impiegato per rimborsare i creditori;
- la posizione degli obbligazionisti è invece ben rappresentata da una ipotetica vendita di una opzione *put* di tipo europeo: infatti in tale modo si ottiene il diritto a ricevere alla scadenza  $T$  un ammontare pari al valore nominale dei titoli di debito.

In base alle ipotesi sinora introdotte il valore di una obbligazione rischiosa risulta pari al valore degli *asset* al netto del valore di mercato delle azioni, che nel modello di Merton è determinato utilizzando la classica formula di Black e Scholes<sup>11</sup>. Ciò equivale ad ipotizzare che il rendimento sugli attivi dell'impresa sia normalmente distribuito, .

Formalmente il valore del titolo di debito emesso dall'impresa, al tempo  $t$ , è la differenza tra il valore di mercato degli *asset* e il valore di una opzione *call* con scadenza in  $T$  e *strike price* fissato al valore nominale  $K$  di tale *bond*:

$$D(t, T) = V(t) - C(K, T)$$

in cui il secondo termine è il valore di una *call option* secondo Black e Scholes<sup>12</sup>, ovvero, in assenza di dividendi,

$$C(K, T) = V(t) \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(d_2)$$

In tale formula  $r$  è a sua volta il tasso di interesse per attività prive di rischio ed  $N(\cdot)$  è la funzione di ripartizione di una variabile normale standard, per cui

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot dy$$

---

<sup>11</sup> Si veda Black e Scholes (1973).

<sup>12</sup> Si veda il capitolo 11 tratto da Hull (1993).

I parametri<sup>13</sup>  $d_1$  e  $d_2$  assumono rispettivamente i valori

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

dove  $\sigma$  indica la volatilità media del valore degli *asset* societari.

La probabilità di osservare il *default* dell'impresa alla scadenza  $T$  nel modello di Merton equivale quindi alla probabilità<sup>14</sup> che a tale data il valore dell'impresa sia al di sotto del valore del debito emesso  $K$ .

$$P[\tau = T] = P[V(T) < K] = N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Lo *spread* creditizio del titolo di debito rispetto ad attività non rischiose si ricava facilmente per differenza, come  $S(t, T) = D(t, T) - B(t, T)$  ed assume la forma:

$$S(t, T) = -\frac{1}{T - t} \cdot \ln\left[N(d_2) + \frac{1}{d} \cdot N(-d_1)\right]$$

dove  $d$  è il cosiddetto *quasi-debt ratio*, una misura del grado di leva finanziaria dell'impresa, definito come

$$d = \frac{K}{V(t)} \cdot e^{-r \cdot (T - t)}$$

Si consideri, ad esempio, una società che ha emesso titoli di debito senza cedola per un valore nominale pari a 100 con scadenza a un anno. Si stima inoltre che il valore  $V(t)$  degli *asset* di tale soggetto al momento dell'osservazione sia 150 e che nell'ultimo anno la volatilità media è stata del 25%. Sulla base di queste ipotesi si ricavano i parametri  $d_1$  e  $d_2$  e, tramite questi,  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{150}{100}\right) + \left(0,02 + \frac{1}{2} \cdot (0,25)^2\right) \cdot 1}{0,25 \cdot \sqrt{1}} = 1,8269 \\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{150}{100}\right) + \left(0,02 - \frac{1}{2} \cdot (0,25)^2\right) \cdot 1}{0,25 \cdot \sqrt{1}} = 1,5769 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N(d_1) = 0,9661 \\ N(d_2) = 0,9426 \end{array} \right.$$

<sup>13</sup> Per una discussione più approfondita a riguardo si rimanda a Wilmott (1998).

<sup>14</sup> Tale probabilità è calcolata sotto la cosiddetta misura *risk-neutral*. Per la definizione di quest'ultima si veda, ad esempio, Bingham (1998).



Il valore di una *call option* con *strike price* pari a  $K$  è pari a

$$C(K, T) = 150 \cdot 0,9961 - 100 \cdot e^{-0,02 \cdot 1} \cdot 0,9426 = 52,5288$$

da questa si ricava il valore dei titoli di debito alla data di osservazione, come

$$D(t, T) = 150 - 52,5288 = 97,4712$$

Si definisce inoltre il *quasi-debt ratio*

$$d = \frac{100}{150} \cdot e^{-0,02 \cdot 1} = 0,6535$$

per ottenere lo *spread* creditizio rispetto al tasso *risk-free*  $r$

$$S(t, T) = -\frac{1}{1} \cdot \ln \left[ 0,9426 + \frac{1}{0,6535} \cdot (1 - 0,9661) \right] = 0,56\%$$

La probabilità di osservare il *default* della società alla scadenza del debito, ovvero dopo un anno, si ricava invece dalla seguente relazione:

$$P[\tau = 1] = P[V(T) < 100] = 1 - 0,9426 = 5,74\%$$

La stima dei parametri inseriti nel modello avviene sulla base dei dati in possesso degli operatori. In particolare<sup>15</sup>:

- l'ammontare complessivo del debito  $K$  si ricava dalle specifiche voci passive dello stato patrimoniale;
- il tasso di interesse *risk-free*  $r$  si stima a partire dai prezzi dei titoli governativi oppure dalla struttura dei tassi *swap*;
- il valore di  $V(t)$  e della volatilità  $\sigma$  avviene indirettamente dall'osservazione del prezzo di mercato delle azioni e della loro volatilità.

Il modello quando viene applicato alle effettive dinamiche del mondo reale diventa molto articolato: vanno definite tutte le variabili rilevanti per l'analisi di una impresa, quali il debito verso le banche, le richieste degli azionisti e dei creditori sociali.

Per le ragioni sopraindicate, l'implementazione pratica dell'approccio strutturale tende a non coincidere perfettamente con il modello, ma piuttosto a individuarne per sommi capi le linee guida e gli aspetti più rilevanti.

---

<sup>15</sup> Per la descrizione dettagliata di un modello di valutazione basato sull'approccio strutturale utilizzato dagli operatori, si veda, ad esempio, la documentazione tecnica di KVM.

Nonostante siano molto apprezzati dagli operatori finanziari, i modelli strutturali sono suscettibili ad alcune critiche. Tra le principali si ricordano:

- la struttura del capitale dell'impresa è estremamente semplificata, infatti comprende una unica categoria di debito con una scadenza unica;
- la bancarotta non prevede alcun costo;
- i valori degli *spread* non sono coerenti con le osservazioni empiricamente rilevabili<sup>16</sup>.

## ***2.2 Il meccanismo del primo passaggio.***

È chiaramente irrealistico assumere che il *default* dell'emittente possa manifestarsi esclusivamente alla scadenza del debito: solitamente vengono definite delle clausole al fine di proteggere gli investitori nel corso della vita del titolo di debito. In alternativa al classico modello di Merton, sono stati proposti modelli<sup>17</sup> per cui il momento in cui si verifica l'insolvenza è quello in cui il valore dell'impresa scende al di sotto di un certo limite  $K(t)$ , in cui tale soglia può essere, a seconda delle finalità ricercate, sia una costante che una funzione dipendente dal tempo oppure un limite di tipo stocastico

Questo permette di specificare l'epoca  $\tau$  in cui avviene il *default* come una variabile casuale, definita come

$$\tau = \min\{t \geq 0 \mid V(t) \leq K(t)\}$$

Come si può osservare dalla figura illustrativa, tramite questo accorgimento l'emittente del debito può venire dichiarato insolvente in un qualsiasi momento compreso tra il collocamento e la scadenza del debito stesso: in effetti questo costituisce, tra l'altro, una garanzia per i detentori dei titoli, in quanto possono attuare le azioni per il recupero del loro credito in un momento in cui la situazione societaria non è ancora completamente compromessa.

---

<sup>16</sup> Nello specifico, gli *spread* ottenuti applicando il modello sono molto bassi rispetto a quanto osservabile sul mercato. Si veda in proposito Cossin e Perrotte (2001).

<sup>17</sup> Il lavoro originale è stato pubblicato da Black e Cox nel 1976. Per una descrizione dettagliata del modello si veda, in particolare, Cossin e Perrotte (2001).

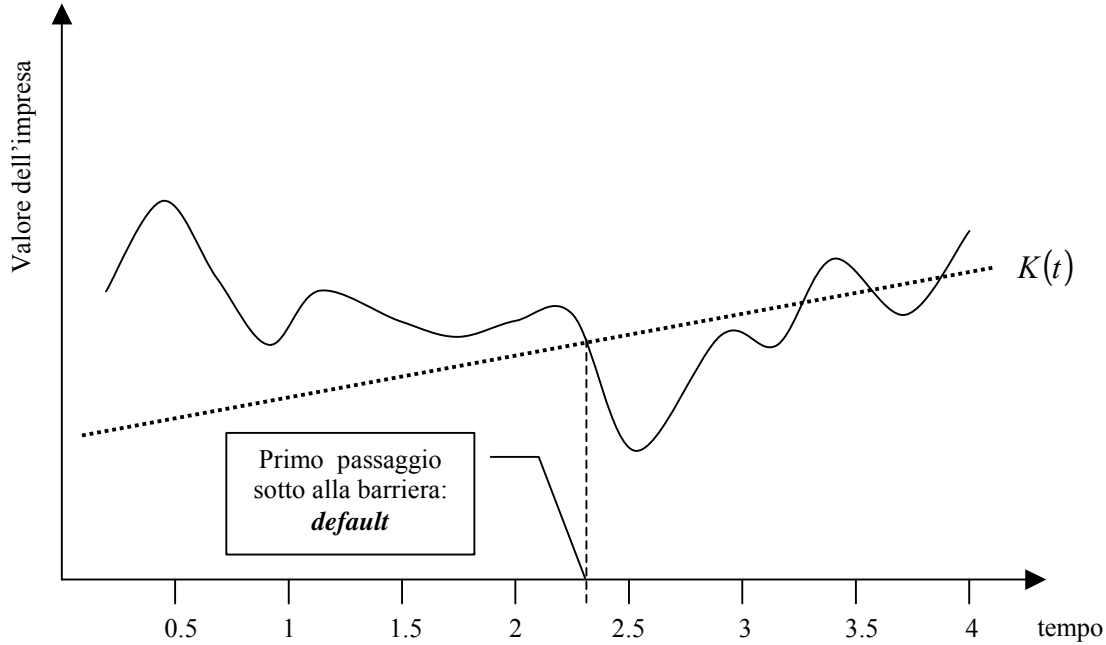


Figura 2: Meccanismo del primo passaggio, con soglia  $K(t)$  lineare.

Scegliendo come soglia un valore costante nel tempo  $K$ , si ottiene la probabilità che il *default* si verifichi prima dell'epoca  $T$ , definita come:

$$P[\tau \leq T] = 1 - N\left(\frac{m \cdot (T - t) - x}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}\right) + e^{\frac{2 \cdot m \cdot x}{\sigma^2}} \cdot N\left(\frac{m \cdot (T - t) + x}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}\right)$$

dove i parametri  $m$  e  $x$  indicano

$$m = r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$$

$$x = \ln\left(\frac{K}{V(t)}\right)$$

Si consideri, ad esempio, una società il cui valore degli *asset* sia stimato in 200 e che abbia iscritto in bilancio un debito che scade tra un anno. Si è fissata un valore delle attività pari a 120, al di sotto del quale il debito contratto non riesce ad essere rimborsato. La volatilità media è stata del 25% ed il tasso di interesse per attività prive di rischio con scadenza ad un anno è pari al 5%.

Sulla base di queste ipotesi si determinano i parametri necessari a definire la probabilità che tale società si riveli insolvente entro la data di scadenza del debito.

$$m = 0,05 - \frac{1}{2} \cdot (0,25)^2 = 0,0188$$

$$x = \ln\left(\frac{120}{200}\right) = -1,9683$$

Quindi la probabilità di *default* entro l'anno è data da

$$P[\tau \leq 1] = 1 - N(2,1183) + e^{-0,3065} \cdot N(-1,9683) = 4,16\%$$

Come già nel modello classico di Merton, anche nell'impostazione del modello del primo passaggio è possibile ricavare il valore del titolo di debito emesso e del suo *spread* rispetto al tasso di interesse *risk-free*<sup>18</sup>.

In questo modello la soglia viene determinata dai detentori delle obbligazioni, in qualità di garanzia. Allo stesso tempo, gli azionisti possono definire il proprio rendimento, tramite la l'approvazione dei dividendi distribuiti. Questi ultimi devono comunque tenere presente che a tassi più elevati corrisponde una probabilità di sopravvivenza della società più breve, e quindi un flusso di dividendi meno protratto nel tempo, dovuto ai *safety covenants* imposti dagli obbligazionisti.

Il pregio di questa impostazione risiede, appunto, nella peculiarità che questi due parametri diventano parte integrante del modello di valutazione, fornendo una maggiore consistenza al modello stesso.

### ***2.3 Probabilità congiunte di default.***

I modelli sinora illustrati presuppongono che l'analisi del rischio di credito sia riferita ad un singolo debito, escludendo pertanto insieme anche eterogenei di attività rischiose. Nella pratica però gli operatori sono sovente interessati a esami più approfonditi che interessano interi portafogli di debiti.

Dovendo trattare insieme di attività rischiose non è possibile esaminare singolarmente ogni attività tramite i modelli sinora proposti: si otterrebbe una approssimazione molto grossolana della reale incidenza del rischio di credito sul gruppo considerato. Questo avviene in quanto la storia di un qualunque soggetto non è un qualcosa a sé stante, indipendente da quanto avviene intorno: esso è comunque inserito in un contesto economico piuttosto che settoriale di cui bisogna tenere conto<sup>19</sup>. Tale fenomeno è confermato da numerosi studi compiuti a riguardo, in modo particolare dalle agenzie di *rating*.

---

<sup>18</sup> Si veda in proposito Cossin e Perrotte (2001).

<sup>19</sup> Si pensi, ad esempio, a un produttore di *microchip*, per cui fasi di recessione sui mercati significano una maggiore propensione all'insolvenza, mentre un eventuale fallimento di un concorrente diretto renderebbe più probabile la propria sopravvivenza.

Al fine di potere tenere presenti queste interazioni tra diverse attività rischiose è necessario che venga innanzitutto esteso il modello di riferimento al caso multivariato, ed in seguito è indispensabile definire precisamente la correlazione che intercorre nell'insieme di riferimento.

In particolare si vuole definire la probabilità congiunta di *default* di due società tra di esse correlate. Indicando con  $\tau_1$  l'insolvenza della prima società e con  $\tau_2$  quello della seconda, la probabilità *risk-neutral* che entrambe siano in *default* alla scadenza  $T$  è data da:

$$P[\tau_1 = T, \tau_2 = T] = P[V_1(T) < K, V_2(T) < K] = N_2(\rho; dd_1; dd_2)$$

in cui  $N_2(\cdot)$  è la funzione di distribuzione normale bivariata avente correlazione  $\rho$ , mentre il parametro  $dd_i$ , per la  $i$ -esima impresa, è dato da

$$dd_i = \frac{\ln\left(\frac{K_i}{V_i(t)}\right) + \left(r - \frac{1}{2} \cdot \sigma_i^2\right) \cdot (T - t)}{\sigma_i \cdot \sqrt{T - t}}$$

Si consideri, ad esempio, il caso di due società 1 e 2 la cui correlazione tra i valore degli *asset* è stata stimata pari al 50%. Il valore stimato delle due società è rispettivamente 130 e 140, mentre per entrambe l'insolvenza viene dichiarata se il valore degli *asset* alla scadenza del debito è inferiore a 100; inoltre le volatilità medie sono state per la società 1 il 20% e per la società 2 il 30%. Il tasso di interesse per attività prive di rischio è attualmente il 3%.

Sulla base di queste informazioni è possibile ricavare la probabilità che si verifichi una insolvenza congiunta delle due società, alla scadenza del debito fissata in un anno, ovvero

$$P[\tau_A = 1, \tau_B = 1] = N_2(0,50; -1,2618; -1,1716)$$

avendo determinato i due parametri  $dd_1$  e  $dd_2$  dalle informazioni fornite.

Tale probabilità vale:

$$P[\tau_A = 1, \tau_B = 1] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{dd_1} \int_{-\infty}^{dd_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{s^2 - 2 \cdot \rho \cdot s \cdot t + t^2}{1 - \rho^2}} \cdot ds \cdot dt = 3,79\%$$

### **3. I MODELLI IN FORMA RIDOTTA.**

I limiti evidenti dei modelli strutturali nel calcolo del prezzo di equilibrio hanno stimolato fortemente la nascita e l'evoluzione di una nuova classe di modelli, i modelli in forma ridotta, altrimenti detti *intensity models*.

Questo approccio è stato affrontato a partire dalla seconda metà degli anni Novanta, grazie al contributo di numerosi studiosi: i più significativi sono i lavori di Jarrow e Turnbull nel 1995, Duffie (1998), Duffie e Singleton (1999), Lando (1994 e 1998), Lando e Turnbull (1997), Madan e Unal (1996) e più di recente Hull e White (2000 e 2001).

I modelli in forma ridotta non cercano di indagare le dinamiche delle poste attive e passive dell'impresa oggetto di studio, ma piuttosto cercano di estrapolare l'arrivo del *default* dai dati di mercato. In questo senso l'attenzione viene focalizzata sul verificarsi del *default*, inteso come un evento esogeno al modello: lo scopo è di ottenere una descrizione delle proprietà statistiche del processo che conduce al fallimento o alla insolvenza del soggetto rischioso, nel modo più accurato possibile, tale da permettere la valutazione di strumenti finanziari fondamentali e la relativa valutazione di strumenti derivati.

A tale scopo lo strumento centrale in questo tipo di analisi è la cosiddetta intensità di *default*, che verrà indicata con la lettera greca  $\lambda$ . Intuitivamente, l'intensità di *default* di un qualsivoglia soggetto indica la probabilità condizionale che esso non adempia alle proprie obbligazioni in un intervallo di tempo successivo al momento dell'osservazione, avendo supposto che non si sia ancora verificata la bancarotta o l'insolvenza.

#### **3.1 Il default come evento di Poisson**

Le proprietà dei processi di Poisson<sup>20</sup> fanno sì che questi strumenti statistici siano particolarmente indicati per lo studio delle insolvenze e dei fallimenti delle società che emettono titoli di debito.

---

<sup>20</sup> Per la descrizione delle proprietà matematiche dei processi di Poisson si rimanda, ad esempio, a Baldi (1993).

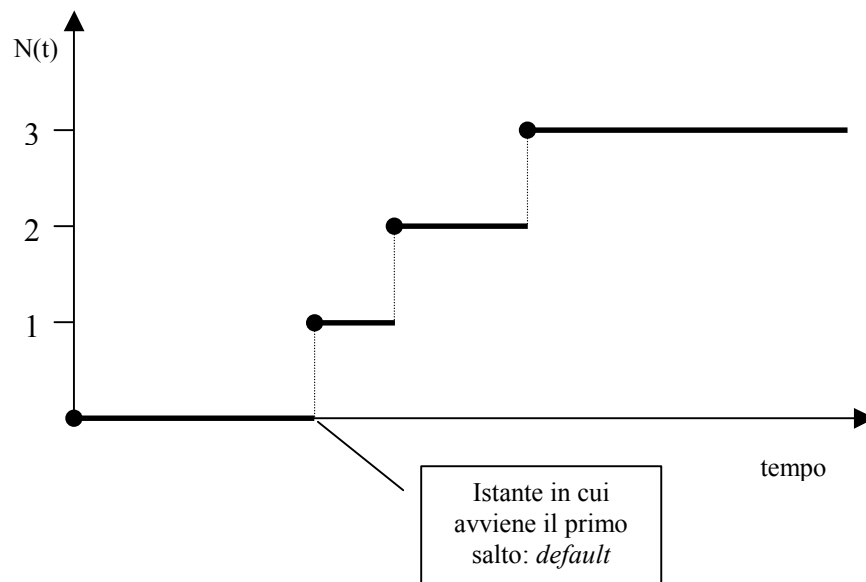
Esprimere il concetto di *default* dal punto di vista matematico significa introdurre una variabile aleatoria, come già nei modelli del primo passaggio, che verrà chiamata *time to default* e sarà indicata con la lettera greca  $\tau$ : essa coincide con il momento in cui avviene il primo salto su di un processo di Poisson  $N(t)$ <sup>21</sup>, ovvero

$$\tau = \min\{t \geq 0 : N(t) > 0\}$$

Il processo di Poisson (omogeneo)<sup>22</sup>  $N(t)$  a sua volta è legato alla nozione di intensità di *default*  $\lambda$ , come segue: si assume che la probabilità di osservare un salto in un piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$ , successivo a  $t$ , sia proporzionale a  $\Delta t$  attraverso la costante  $\lambda$ :

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \cdot \Delta t$$

Si assume inoltre che il verificarsi di più di un salto in ogni intervallo abbia una probabilità trascurabile rispetto  $\lambda \cdot \Delta t$ .



**Figura 3: Illustrazione di un processo a salti e momento in cui si verifica l'insolvenza.**

<sup>21</sup> Si definisce un processo di Poisson  $N(t)$  come un processo di conteggio crescente che assume esclusivamente valori interi non negativi (0,1,2,...) e ha un valore iniziale pari a zero. Se si indicano con  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  i diversi tempi in cui avvengono i salti del processo, per cui

$$N(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \quad \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \begin{cases} \text{vale 1 se è vera la proposizione } \{\tau_i \leq t\} \\ \text{vale 0 se è falso l'argomento } \{\tau_i > t\} \end{cases}$$

<sup>22</sup> Il modello che utilizza i processi di Poisson si può caratterizzare anche per il modo in cui viene definita l'intensità di *default* stessa. Si parla quindi di:

- processo di Poisson omogeneo, quando l'intensità di *default* è costante nel tempo e deterministica;
- processo di Poisson inomogeneo, se l'intensità di *default* viene definita come funzione dipendente dal tempo;
- processo di Cox, se le dinamiche dell'intensità di *default* vengono descritte da una relazione di tipo stocastico.

Tramite questa relazione fondamentale si ricavano<sup>23</sup> le altre funzioni statistiche che permettono di descrivere la tendenza o meno di un soggetto finanziario ad essere l'oggetto di insolvenze o bancherotte.

In particolare si ricava una funzione di ripartizione  $F(t)$  della variabile aleatoria  $\tau$ , definita come

$$F(t) = P[\tau \leq t] = 1 - \exp\{-\lambda \cdot t\} \quad t \geq 0$$

ed interpretabile come probabilità di osservare il *default* entro  $t$ .

Da questa si ottiene facilmente una funzione di sopravvivenza (*survival probability*), come suo complemento a uno, che esprime la probabilità che l'insolvenza non si sia ancora verificata al momento  $t$ .

$$S(t) = 1 - F(t) = P[\tau > t] = \exp\{-\lambda \cdot t\} \quad t \geq 0$$

Si consideri ad esempio un soggetto esposto al rischio di credito che presenti una intensità di *default* stimata in 0,05. La probabilità che si osservi l'insolvenza entro il secondo periodo dal momento in cui si compie l'osservazione è pari a  $P[\tau \leq 2] = 1 - \exp\{-0,05 \cdot 2\} = 9,52\%$ . Di conseguenza la probabilità di sopravvivenza di tale soggetto al secondo periodo è pari a  $P[\tau > 2] = \exp\{-0,05 \cdot 2\} = 90,48\%$ .

Assumendo un tasso di interesse  $r$  costante ed un tasso di recupero in caso di insolvenza nullo, il valore di un titolo *zero coupon* rischioso per una unità di nominale è dato da:

$$D(t, T) = P[\tau > t] \cdot B(t, T) = e^{-(r+\lambda)(T-t)}$$

Ovvero il valore in  $t$  di un titolo rischioso che scada in  $T$  è pari al valore di un analogo titolo privo di rischio, il cui rendimento sia maggiorato dell'intensità di *default* con un tasso di recupero nullo: pertanto il parametro  $\lambda$  può venire altrimenti interpretato come lo *spread* creditizio di una attività rischiosa rispetto al rendimento *risk-free* offerto dal mercato nell'intervallo di tempo di riferimento.

---

<sup>23</sup> Si veda in proposito il capitolo 5 di Schönbucher (2003).



### 3.2. Il valore di recupero.

Solitamente il fallimento di un soggetto rischioso non provoca mai l'annullamento completo del valore dei titoli di debito emessi: nella maggioranza dei casi i creditori sono in grado di recuperare una parte del valore nominale loro spettante e la frazione di capitale recuperata a seguito del *default* del titolo rischioso viene chiamata *recovery rate*. Il concetto simmetrico al tasso di recupero è il tasso di perdita, cioè la frazione del debito di cui il creditore non è in grado rientrare in possesso<sup>24</sup>.

Se si considera un modello che utilizzi l'approccio di tipo strutturale, l'ammontare recuperato dal detentore del titolo successivamente al fallimento è implicito nel modello stesso: esso rappresenta semplicemente il valore delle attività dell'impresa ancora presente alla scadenza del titolo.

Al contrario nei modelli che impiegano un approccio in forma ridotta, il processo che permette il recupero di almeno una parte del credito deve essere esplicitato nel modello. Infatti per potere determinare il prezzo di una qualsiasi attività soggetta a rischio di credito, il *payoff* generato dall'eventuale insolvenza deve essere specificato in aggiunta al meccanismo di descrizione dell'insolvenza o della bancarotta.

Attualmente esistono alcune convenzioni largamente usate nei mercati per definire il tasso di recupero. Tra le più interessanti e studiate si ricordano quelle che considerano, per ogni unità di valore nominale:

- un recupero costante (*constant recovery*);
- un recupero equivalente (*equivalent recovery*);
- un recupero frazionale (*fractional recovery*).

#### **Constant recovery.**

Questa prima ipotesi parte dal presupposto che sia possibile definire a priori un valore da attribuire a quanto verrà recuperato in caso di insolvenza, prescindendo da qualsiasi altro elemento come le modalità con cui si è verificato il *default*, oppure il tasso di interesse per attività prive di rischio al momento della dichiarazione dell'insolvenza.

---

<sup>24</sup> In termini assoluti si parla invece di *recovery* e *severity*, ovvero di valore recuperato e valore perso.

Tale ipotesi è sicuramente molto restrittiva, ma presenta il vantaggio di permettere in fase di studio di un modello di focalizzarsi su altre variabili critiche, mentre in fase di applicazione consente di snellire i calcoli ed è particolarmente indicato nel caso in cui si possa ragionevolmente fare affidamento sui dati medi di *recovery* forniti dalle agenzie di *rating*.

### **Equivalent recovery.**

L'ipotesi una *recovery* di tipo equivalente fu introdotta da Jarrow e Turnbull nel 1995. Secondo questa ipotesi, ogni attività in *default* è equivalente ad una frazione  $R$ ,  $R \in [0,1]$ , di titoli privi di rischio e di valore nominale pari al valore del debito a scadenza.

### **Fractional recovery.**

La caratteristica di questo modello è che l'insolvenza non comporta la liquidazione dell'entità di riferimento, ma una riorganizzazione del debito, con nuove emissioni che sostituiscono le precedenti. Pertanto, al verificarsi di un *default*, i titoli perdono una frazione  $q$  del loro valore facciale. In seguito al processo di ristrutturazione, tuttavia il valore residuo  $(1-q)$  continua a venire negoziato sotto forma di un nuovo contratto.

Sotto questa ipotesi il valore di un titolo senza cedola dal valore nominale unitario è pari a

$$D(t, T) = e^{-[r+(1-R)\lambda](T-t)}$$

dove  $R$ , con  $R \in [0,1]$ , è appunto il *recovery rate*.

Nonostante queste diverse possibili impostazioni del *recovery rate*, i risultati che si ottengono nel momento in cui essi vengono implementati in un modello in forma ridotta non differiscono sostanzialmente tra loro. Pertanto è giustificato il ricorso all'ipotesi di recupero costante, in quanto permette notevoli semplificazioni del modello<sup>25</sup>.

---

<sup>25</sup> Si veda in proposito Schönbucher (2000).

### 3.3 Stima delle intensità di default.

Uno dei punti chiave nella valutazione del rischio di credito tramite un modello in forma ridotta consiste nella determinazione l'intensità con cui avviene il *default* della attività oggetto di studio.

I metodi impiegati per ottenere informazioni relative al rischio di credito relativo ad un determinato soggetto sono principalmente due:

- tramite l'utilizzo dei dati storici di *default*, forniti dalle agenzie di *rating* e ordinate nelle cosiddette matrici di transizione<sup>26</sup>, che permettono di definire la cosiddetta probabilità storica che il soggetto appartenente ad una certa classe di *rating* sia in *default* entro i successivi  $t$  periodi;
- impiegando i dati osservabili sui mercati finanziari, ed in particolare gli *spread* creditizi: tale impostazione fornisce probabilità di tipo *risk-neutral*, utili nel *pricing* di molti strumenti finanziari<sup>27</sup>.

Al fine di estrapolare le intensità di *default* dai dati di mercato<sup>28</sup> è necessario innanzitutto definire il rendimento a scadenza del titolo rischioso che, tramite il confronto con il tasso *risk-free*  $r$  alla medesima scadenza, permette di avere una prima indicazione sul rischio di credito di un determinato soggetto percepito dal mercato, in termini di *credit spread*.

Sotto l'ipotesi di una *recovery* nulla, come descritto nei paragrafi precedenti, lo *spread* creditizio  $S(t, T)$  coincide con l'intensità di *default*, per cui  $S(t, T) = \lambda$ .

Ipotizzando invece un valore di recupero del titolo senza cedole rischioso costante e pari a  $R$ , si ricava il valore dell'intensità di *default*, espressa dalla seguente relazione:

$$\lambda = -\frac{1}{T-t} \cdot \ln \left[ \frac{D(t, T) - R \cdot e^{-r \cdot (T-t)}}{(1-R) \cdot e^{-r \cdot (T-t)}} \right]$$

Si consideri, ad esempio, un titolo rischioso senza cedola che scade dopo un anno e che al momento dell'osservazione è quotato 0,95. Un analogo titolo non rischioso è quotato 0,98. Si ricava facilmente che il rendimento a scadenza del primo è il 5,13% mentre il secondo rende 2,02%.

Dal confronto tra i due rendimenti si ricava lo *spread* creditizio a un anno del soggetto rischioso che, sotto l'ipotesi di *recovery* nulla coincide con l'intensità di *default*  $\lambda$  e vale 3,11%.

---

<sup>26</sup> Si tratta di matrici che definiscono empiricamente la probabilità di migrazione da una determinata classe di *rating* ad un'altra, su di un orizzonte temporale predefinito.

<sup>27</sup> In particolare di contratti derivati.

<sup>28</sup> Per la descrizione dettagliata di un modello di valutazione basato sull'approccio in forma ridotta si veda, ad esempio, la documentazione tecnica di *Credit Risk+*, modello sviluppato da *Credit Suisse Financial Products*.

Ipotizzando invece un tasso di recupero costante pari al 30% del valore nominale, l'intensità di *default* vale 4,47%.

$$\begin{cases} \lambda_{R=0} = s = 3,11\% \\ \lambda_{R=30\%} = -\frac{1}{1} \cdot \ln \left[ \frac{0,98 - 0,30 \cdot 0,98}{(1 - 0,30) \cdot 0,98} \right] = 4,47\% \end{cases}$$

La differenza tra le due intensità è giustificata dal fatto che, a parità di rendimento, del primo titolo rischioso non si recupera nulla in caso di insolvenza mentre nel secondo caso si recupera una frazione pari al 30%: la seconda ipotesi è sicuramente quella che presenta un grado di esposizione al rischio di credito maggiore.

### 3.4. Estensione del modello in forma ridotta al caso multivariato.

Anche nel caso di modelli in forma ridotta è possibile analizzare insiemi composti da diverse attività sottostanti, legate tra loro da correlazione.

Un modo per estendere questo approccio al caso multivariato consiste nel definire un numero  $m$  di *shock*, cioè di eventi che portano al *default* di  $k$  di titoli, appartenenti ad un insieme di  $n$  attività sottostanti<sup>29</sup>. Questo permette di definire tutte le relazioni presenti all'interno del portafoglio di titoli<sup>30</sup>. Ogni *shock* viene modellato tramite un processo di Poisson  $N_j(t)$  indipendente dagli altri, avente una sua propria intensità.

In questa impostazione<sup>31</sup>, la probabilità di sopravvivenza della  $i$ -esima società è definita come:

$$S_i(t) = P[\tau_i > t] = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot \lambda_k \cdot t \right\}$$

Invece la probabilità di sopravvivenza congiunta degli  $n$  soggetti rischiosi, sul medesimo orizzonte temporale, è data da

$$S(t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2, \dots, \tau_n > t_n] = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \max \{ a_{1k} \cdot t_1, a_{2k} \cdot t_2, \dots, a_{nk} \cdot t_n \} \right\}$$

<sup>29</sup> Per una descrizione dettagliata del modello in forma ridotta multivariato si veda, in particolare, Giesecke (2002).

<sup>30</sup> I diversi *shock* possono venire interpretate in relazione alla tendenza della singola impresa a osservare il *default*, oppure come *shock* settoriali o nazionali che determinino l'insolvenza delle imprese del settore o del paese in esame, oppure, al più, come un evento che influenzi l'intera economia.

<sup>31</sup> I termini  $a_{ik}$  e  $a_{hk}$  possono assumere un valore unitario oppure nullo, a seconda se lo *shock* in esame coinvolge o meno l'attività di riferimento.

Si consideri, ad esempio, il caso di due società, A e B. L'intensità di *default* relativa alla singola impresa è stata stimata rispettivamente nello 0,05 e nello 0,03, in modo tale che  $\lambda_A = 0,05$  e  $\lambda_B = 0,03$ . Inoltre l'intensità di un *default* congiunto di A e B vale 0,01, ovvero  $\lambda_{AB} = 0,01$ . Sulla base di queste ipotesi si ricava facilmente la probabilità di sopravvivenza a due anni dei due soggetti rischiosi presi singolarmente<sup>32</sup>.

$$S_A(2) = P[\tau_A > 2] = \exp\{-(1 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0,01) \cdot 2\} = 88,69\%$$

$$S_B(2) = P[\tau_B > 2] = \exp\{-(0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0,01) \cdot 2\} = 92,31\%$$

La probabilità di sopravvivenza congiunta invece implica che al secondo anno entrambe i soggetti non abbiano ancora fatto registrare il *default*.

$$S_{AB}(2) = P[\tau_A > 2, \tau_B > 2] = \exp\{-(1 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0,01) \cdot 2\} = 83,53\%$$

---

<sup>32</sup> Si noti come ad una intensità di *default* superiore corrisponda una minore probabilità di sopravvivenza. Questo è dovuto ad una maggiore rischiosità della società che presenta una maggiore intensità di *default*.

## ***Riferimenti bibliografici.***

### **Testi consultati.**

- Baldi P., *Calcolo delle probabilità e statistica*, McGraw-Hill, 1993.
- Bielecki T., Rutowski M., *Credit Risk: modeling, valuation and hedging*, Springer, 2002.
- Bingham N., *Risk-neutral valuation: pricing and hedging of financial derivatives*, Springer, 1998.
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula methods for finance*, John Wiley and Sons, 2004.
- Cossin D., Perrotte H., *Advanced credit risk analysis: financial approaches and mathematical models to assess, price and manage risk*, John Wiley and Sons, 2001.
- Duffie D., Singleton K., *Credit risk: pricing, measurement and management*, Princeton University Press, 2003.
- Hull J., *Options, futures and other derivative securities*, Prentice-Hall International, 1993.
- Schönbucher P., *The pricing of credit risk and credit risk derivatives*, University of Bonn, Department of Statistics, 2000.
- Schönbucher P., *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*, John Wiley and Sons, 2003.
- Wilmott P., *The mathematics of financial derivatives*, Cambridge University Press, 1998.

### **Working papers e pubblicazioni.**

- Black, Cox, *Valuing corporate securities, some bond indenture provisions*, Journal of Finance, Vol. 31, 1976.
- Black, Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, 1973.
- Carty L., *Moody's rating migration and credit quality correlation 1920-1996*, Moody's investors service, 1997.
- Giesecke K., *An exponential model for dependent default*, Humboldt-Universität zu Berlin, 2002.
- Giesecke K., *Credit risk modeling and valuation: an introduction*, Cornell University, 2003.

Hull J., White A., *Valuing credit default swap II: modelling default correlations*, University of Toronto, 2000.

King M., McGinty L., Due J., *Credit spreads, default rates and the business cycle*, JP Morgan Credit Research, 2002.

KMV, *Modeling Default Risk*, 1997.

Lehrbass, *A simple approach to country risk*, Springer, 2000.

Merton R.C., *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rate*, Journal of Finance 29, 1974.